

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования «Санкт-Петербургский горный университет»

На правах рукописи

Елисеева Надежда Николаевна



**ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ И РАЗРАБОТКА
ПОИСКОВЫХ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ
НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В ГЕОДЕЗИИ**

Специальность 25.00.32 – Геодезия

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
Мустафин М.Г.

Санкт-Петербург – 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1 ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ	14
1.1 Общие положения теории оптимизации.....	14
1.2 Оптимизационные задачи в геодезии	21
1.3 Выводы по Главе 1	23
ГЛАВА 2 МЕТОДЫ ПОИСКОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ	25
2.1 Постановка задачи оптимизации при использовании поисковых методов ...	25
2.2 Стратегии поисковых методов	31
2.2.1 Поисковые методы одномерной оптимизации	32
2.2.2 Поисковые методы многомерной оптимизации	33
2.3 Сравнение поисковых методов с классическими строгими методами уравнивания	41
2.4 Рост производительности компьютеров как фактор развития поисковых методов.....	43
2.4.1 Предпосылки развития методов нелинейного программирования	43
2.4.2 Взаимосвязь компьютерных технологий и геодезии	48
2.5 Выводы по Главе 2	51
ГЛАВА 3 МЕТОД ПАРАБОЛ.....	54
3.1 Принцип решения задач оптимизации методами квадратичной аппроксимации	54
3.2 Точность вычислений методом парабол.....	64
3.3 Сравнение метода парабол с методом Ньютона вторых производных.....	67
3.4 Решение тестовых оптимизационных геодезических задач методом парабол	69
3.4.1 Аппроксимация результатов обмеров окружностью	69
3.4.2 Комбинированная засечка.....	73
3.4.3 Многократная линейная засечка	76
3.5 Выводы по Главе 3	81

ГЛАВА 4 ПРОСТОЙ ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ.....	82
4.1 Эволюционные алгоритмы.....	82
4.2 Генетический алгоритм	85
4.3 Возможные пути уменьшения эвристики генетических алгоритмов.....	93
4.4 Решение тестовых оптимизационных геодезических задач по простому генетическому алгоритму.....	93
4.4.1 Аппроксимация результатов обмеров окружностью	94
4.4.2 Комбинированная засечка.....	95
4.4.3 Многократная линейная засечка	95
4.5 Выводы по Главе 4.....	96
ГЛАВА 5 ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРЕНОВ СООРУЖЕНИЙ БАШЕННОГО ТИПА ПО ДАННЫМ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ	99
5.1 Постановка задачи	99
5.2 Положения, заложенные в программный комплекс.....	101
5.3 Методика отбраковки грубоошибочных измерений.....	102
5.4 Работа программного комплекса.....	105
5.5 Выводы по Главе 5.....	109
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	111
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	113
ПРИЛОЖЕНИЕ А Сравнение алгоритмов классических строгих методов (коррелятного и параметрического) и общего алгоритма поисковых методов....	134
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Пиковая производительность двойной точности процессоров персональных компьютеров 4-го и 5-го поколений	135
ПРИЛОЖЕНИЕ В Плановые координаты точек на окружности	136
ПРИЛОЖЕНИЕ Г Плановые координаты точек на окружности.....	137
ПРИЛОЖЕНИЕ Д Результаты решения задачи аппроксимации результатов обмеров окружностью методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров.....	139

ПРИЛОЖЕНИЕ Е Результаты решения задачи аппроксимации результатов обмеров окружностью в программе Mathcad с помощью функции Minimize при разных вариантах задания начальных значений параметров	142
ПРИЛОЖЕНИЕ Ж Результаты решения комбинированной засечки методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров	145
ПРИЛОЖЕНИЕ И Результаты решения комбинированной засечки в программе Mathcad с помощью функции Minimize при разных вариантах задания начальных значений параметров.....	149
ПРИЛОЖЕНИЕ К Результаты решения многократной линейной засечки методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров	151
ПРИЛОЖЕНИЕ Л Результаты решения многократной линейной засечки в программе Mathcad с помощью функции Minimize при разных вариантах задания начальных значений параметров	155
ПРИЛОЖЕНИЕ М Результаты решения задачи аппроксимации результатов обмеров окружностью простым генетическим алгоритмом при разных вариантах задания начальных значений параметров.....	158
ПРИЛОЖЕНИЕ Н Результаты решения комбинированной засечки простым генетическим алгоритмом при разных вариантах задания начальных значений параметров	159
ПРИЛОЖЕНИЕ П Результаты решения многократной линейной засечки простым генетическим алгоритмом при разных вариантах задания начальных значений параметров	160

ВВЕДЕНИЕ

«В каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней есть математики» (Иммануил Кант). Геодезия, одна из древнейших наук, всегда была связана с математикой, геометрией, физикой, астрономией и другими науками.

Геодезия и математика долгое время взаимно дополняли и развивали одна другую. Математика настолько широкая область знаний, что с её помощью можно решить любую техническую задачу, нужно только уметь правильно воспользоваться математическим аппаратом.

Современные технологии и средства измерений в геодезии (лазерные сканеры, лазерные трекеры, спутниковые системы позиционирования, фотограмметрические системы, беспилотные летательные аппараты и пр.) позволяют получать огромное количество информации о наблюдаемых объектах. При этом возникают задачи оптимизации данных, содержащих огромные массивы избыточных измерений, и построения наиболее точных моделей объектов или изучаемых процессов. До относительно недавнего времени решать подобные задачи практически не представлялось возможным. Только на современном уровне развития вычислительной техники стало доступно решать оптимизационные геодезические задачи с использованием методом математического программирования и эволюционного моделирования.

В диссертации рассмотрены вопросы применения поисковых методов при решении нелинейных оптимизационных задач в геодезии. Работа является одним из начальных этапов широкого внедрения данных методов в геодезическую практику. Методы поисковой оптимизации при их программной реализации на быстродействующих компьютерах уже в ближайшем будущем обеспечат мощный математический аппарат для оперативного получения достоверных решений оптимизационных геодезических задач различной сложности.

Проверка работоспособности и эффективности поисковых методов, рассматриваемых в диссертации, осуществлена путём их программной

реализации в среде Visual Basic for Application (VBA) при решении тестовых задач.

Актуальность темы исследования

В настоящее время в геодезии происходят кардинальные изменения, как в методах измерений, так и в обработке получаемых данных. Повышение производительности измерительной и вычислительной техники не только послужили толчком для постановки сложных задач оптимизации в геодезии, но и дали возможности решать поставленные задачи по-новому, например, с помощью методов нелинейного программирования и, в частности, поисковыми методами.

В этих условиях математическая обработка геодезических измерений приобретает принципиально новые возможности, происходит постепенный переход от классических строгих методов к альтернативным методам математического программирования, эволюционного моделирования и т.п., что существенно расширяет возможности численного анализа процесса оптимизации. Данная тенденция обусловлена стремительным развитием компьютерной техники и программного обеспечения.

Поисковые методы, как при самостоятельном использовании, так и в сочетании с традиционными подходами создают широкую математическую базу для классифицирования и оперативного выбора наиболее эффективного решения задач оптимизации, что предопределяет актуальность диссертационной работы.

Кроме того, разработка поисковых методов непосредственно связана с программными средствами, которые возможно интегрировать в различные компьютерные технологии моделирования. В этой связи настоящая разработка отвечает взятому курсу страны на импортозамещение и создание отечественных программных продуктов.

Степень разработанности темы исследования

Математическая обработка геодезических измерений является важнейшим аспектом во всех областях геодезии. Значительный вклад в развитие её теоретических основ внесли видные учёные-геодезисты: В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев, В.Н. Ганьшин, В.Г. Зданович, А.А. Изотов, Ф.Н. Красовский,

Н.Г. Келль, Л.Н. Келль, А.И. Мазмишвили, М.С. Молоденский, В.В. Попов, К.Л. Проворов, Н.А. Урмаев, А.С. Чеботарёв и другие; дальнейшее развитие данной отрасли продолжили И.Т. Антипов, В.А. Бывшев, А.А. Визгин, М.Д. Герасименко, В.В. Голубев, А.В. Гордеев, Н.Д. Дроздов, Б.Н. Дьяков, Г.Н. Ефимов, И.Г. Журкин, Ю.В. Кемниц, С.А. Коробков, В.А. Коугия, Ю.В. Линник, Ю.И. Маркузе, М.М. Машимов, Г.А. Мещеряков, Ю.М. Нейман, В.К. Панкрушин, А.З. Сазонов, А.А. Соломонов, М.С. Урмаев, З.С. Хаимов, А.В. Хлебников, З.М. Юршанский, З. Адамчевский и другие.

Развитие методов математического программирования связано с именами следующих учёных: Дж.Б. Данциг, Р. Беллман, Л.В. Канторович, Дж. Фон Нейман, Д. Химмельблау и другие.

Вопросами теории оптимизации в геодезической практике и внедрением методов нелинейного программирования при математической обработке геодезических измерений занимались многие учёные-геодезисты, среди которых М.Я. Брынь, Н.Г. Видуев, А.В. Зубов, М.И. Коробочкин, Н.Т. Ковтун, В.А. Коугия, Б.Т. Мазуров, Г.В. Макаров, Ю.И. Маркузе, М.М. Машимов, В.И. Мицкевич, В.Г. Назаренко и другие.

Как правило, при решении задач оптимизации в геодезии применяют методы, основанные на вычислении производных. Поисковые методы рассматриваются в контексте сравнения с другими методами при решении какой-либо конкретной задачи. На данный момент в геодезии существуют лишь единицы отработанных методик, выполненных в программном виде, в рамках которых стратегии поисковых методов адаптированы для решения геодезических задач. Возможности применения данных методов в геодезической практике рассмотрены в работах М.Я. Брыня, А.В. Зубова, М.И. Коробочкина, В.А. Коугия, Г.В. Макарова и В.И. Мицкевича.

Цель работы – повышение информативности, эффективности и оперативности процесса обработки геодезических измерений за счёт разработки и использования поисковых методов.

Идея работы состоит в численном анализе процесса оптимизации при решении различных геодезических задач, на основе которого осуществляется выбор алгоритмов, уточняющих и ускоряющих процесс оптимизационного поиска.

Задачи исследований:

1. Анализ методов обработки геодезических измерений и обоснование применения поисковых методов для решения оптимизационных геодезических задач.

2. Разработка оптимизационных поисковых методов, основанных на фундаментальных принципах: теории квадратичной аппроксимации целевой функции и эволюционных стратегиях.

3. Создание программных алгоритмов по реализации разработанных поисковых методов.

4. Проверка разработанных программных алгоритмов при решении прикладных геодезических задач.

Объект исследований – объекты геодезического мониторинга и результаты измерений.

Предмет исследований – процесс обработки измерений: поисковые методы оптимизации при решении геодезических задач, компьютерно-информационная технология обработки измерений на базе современного программного обеспечения.

Научная новизна работы:

1. Разработан программный алгоритм, реализующий метод парабол, который за счет квадратичной аппроксимации целевой функции легко адаптируется для решения оптимизационных геодезических задач, эффективен и гарантированного даёт верные результаты при разных вариантах задания начальных значений параметров.

2. Разработан простой генетический алгоритм поисковой оптимизации, основанный на имитации эволюционного процесса (размножение, мутация, отбор).

3. Предложен программный комплекс, реализующий простой генетический алгоритм, позволяющий, в совокупности с методикой оценки качества оптимизируемых моделей (объектов, процессов, явлений и т.п.), построенных по методу наименьших квадратов, эффективно выделять и отбраковывать грубые ошибки измерений при обработке больших объёмов данных.

Теоретическая и практическая значимость работы:

Предложены алгоритмы решения оптимизационных задач, совершенствующие аппарат математической обработки геодезических измерений поисковыми методами за счет программной реализации метода парабол, разработки простого генетического алгоритма, и рекомендовано их объединение в одну методику для повышения оперативности и эффективности оптимизационного процесса.

Разработаны методика и практические рекомендации по применению поисковых методов, создан программный комплекс по их реализации с обработкой результатов геодезических измерений применительно к определению кренов сооружений башенного типа.

Методология и методы исследования

Проведение исследований осуществлялось в соответствии с системным подходом, включающим научный анализ и обобщение ранее опубликованных исследований, обработку и анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований в области теории математической обработки геодезических измерений и теории оптимизации, разработку программных алгоритмов, реализующих поисковые методы в программной среде Visual Basic for Application, и проверку их работоспособности на практических примерах решения геодезических задач.

Положения, выносимые на защиту:

1. При обработке результатов геодезических измерений эффективно применение оптимизационного метода парабол с обоснованием шага разностной схемы, что позволяет резко сократить число итераций (до 1-2 итераций) для

достижения минимума целевой функции даже при очень грубом задании начальных значений параметров.

2. Применение разработанного простого генетического алгоритма при нелинейной оптимизации геодезических измерений обеспечивает сходимость итерационного процесса для широкого спектра начальных значений параметров, что при сравнении с другими методами значительно упрощает процесс решения и повышает надёжность конечных результатов.

3. Применение простого генетического алгоритма в совокупности с оценкой качества оптимизируемых моделей (объектов, процессов, явлений и т.п.), построенных по методу наименьших квадратов, представляет собой эффективную методику быстрой отбраковки грубоошибочных измерений при обработке больших объёмов геодезических данных поисковыми методами.

Степень достоверности результатов исследования обусловлена использованием широко известных методов математического программирования и эволюционного моделирования. Адекватность методов, используемых в работе, подтверждается фундаментальными исследованиями по внедрению теории оптимизации для широкого круга производственных задач, применением современных и проверенных ведущими научно-исследовательскими организациями программного комплекса Mathcad и программной среды Visual Basic for Application, а также обсуждением основных результатов работы в рамках конференций и дискуссий по опубликованным статьям.

Апробация результатов

Основные положения и результаты работы докладывались и получили положительную оценку на всероссийских и международных конференциях:

- II Всероссийская научно-практическая конференция «Совершенствование средств и методов сбора, обработки геопространственной информации и системы подготовки специалистов в области топогеодезического и навигационного обеспечения» (г. Санкт-Петербург, 2018 г.);

- II Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы геодезии, кадастра, рационального земле- и природопользования», (г. Тюмень, 2018 г.);
- XVII Всероссийская конференция-конкурс студентов и аспирантов горно-геологического, нефтегазового, энергетического, машиностроительного и металлургического профиля (г. Санкт-Петербург, 2019 г.);
- XV Международный форум-конкурс студентов и молодых учёных «Актуальные проблемы недропользования» (г. Санкт-Петербург, 2019 г.);
- Международная научно-техническая конференция «Строительство и архитектура: теория и практика инновационного развития» (САТРИД-2019) (г. Кисловодск, 2019 г.);
- 62-ая Международная научная конференция на базе Горно-геологического университета им. И. Рылъски (г. София, Болгария, 2019 г.);
- Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы инженерной геодезии» (г. Санкт-Петербург, 2019 г.).

Практическая реализация

Результаты исследований, а также разработанный программный комплекс рекомендуется к применению при геодезическом мониторинге сооружений башенного типа в процессе строительства и эксплуатации в производственной деятельности ООО «Научно-производственное предприятие «Бента» и ЗАО «Геодезические приборы» (г. Санкт-Петербург).

Выводы и рекомендации диссертационной работы целесообразно использовать в учебном процессе по дисциплинам специальности «Прикладная геодезия».

Личный вклад автора заключается в постановке цели и задач диссертационного исследования; анализе зарубежной и отечественной литературы по теории оптимизации и методам нелинейного программирования; анализе стратегий поисковых методов, их разработке и совершенствовании; составлении программ, реализующих методы поисковой оптимизации, для решения тестовых оптимизационных задач, и проведении экспериментальных

исследовании по их внедрению при решении геодезических задач; обобщении полученных экспериментальных результатов, анализе и обсуждении их с научным руководителем; составлении и оформлении публикаций; апробации основных положений работы.

Публикации по работе

Результаты диссертационной работы в достаточной степени освещены в 11 печатных работах, в том числе в 1 статье – в изданиях из перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук, в 2 статьях – в изданиях, входящих в международную базу данных и систему цитирования Scopus; получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура работы

Диссертация состоит из оглавления, введения, пяти глав с выводами по каждой из них, заключения, списка литературы, включающего 188 наименований, и 13 приложений. Диссертация изложена на 160 страницах машинописного текста, содержит 32 рисунка и 13 таблиц.

Благодарности

Автор выражает благодарность преподавателям и сотрудникам кафедры инженерной геодезии Санкт-Петербургского горного университета, а также лично научному руководителю д.т.н. М.Г. Мустафину за значительную помощь на разных этапах выполнения работы.

Автор выражает глубокую благодарность и искреннюю признательность к.т.н. А.В. Зубову за идеи, рекомендации, советы и важный вклад в диссертационную работу, а также ощутимую моральную поддержку в период её написания, и к.т.н. Ю.Н. Корнилову за полезные советы, критические замечания и редакторские правки.

Автор считает своим долгом выразить благодарность за неоценимый вклад в диссертацию д.т.н. Г.В. Макарова. Геннадий Васильевич являлся активным сторонником поисковых методов и одним из основоположников их

использования при обработке геодезических данных. Диссертационная работа во многом является продолжением и развитием его идей.

ГЛАВА 1 ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ

1.1 Общие положения теории оптимизации

Впервые термин «оптимум» был введён Г.В. Лейбницем в XVIII веке при рассмотрении теологии [21, 81], однако позднее понятие оптимизации употреблялось им в комбинаторике, математической логике и механике [40, 145]. В XVIII веке вариативному исчислению посвящены работы Д. Бернулли, Л. Эйлера, Ж.Л. Лагранжа, в XIX веке – К. Вейерштрасса, К.Г. Якоби [14, 21, 145].

В 1820 году Ж. Фурье сформулировал задачу линейного программирования и предложил метод её решения – направленного перебора смежных вершин [6]. Позднее в этой области работали Л.В. Канторович [36] и Дж.Б. Данциг [56]. Долгое время теоретические разработки не находили практического применения в связи с низкой производительностью вычислительной техники, только в конце 40-х годов XX века после появления первых ЭВМ были решены тысячи прикладных задач. С развитием науки и техники эти задачи усложнялись и появлялись новые, которые требовали разработки новых методов решения. Таким образом, к 70-м годам XX века появился новый раздел прикладной математики – математическое программирование.

Термин оптимизация встречается во всех областях деятельности человека [9, 12, 46, 48, 53, 102, 105, 152]. В широком смысле под оптимизацией понимают выбор наилучшего решения поставленной задачи из множества возможных. К оптимизационным задачам относятся: составление расписаний, задача коммивояжёра, построение математических моделей различных объектов и явлений, задачи на графы, задачи планирования производства и т.п. Оптимизация применяется в экономике, менеджменте, логистике, при исследовании, проектировании и диагностике в научной и производственной сферах.

Задача оптимизации появляется только при наличии избыточных данных (неоднозначности решения). Любая задача при наличии избыточных данных имеет несколько (а в некоторых случаях, возможно, даже бесконечное число)

решений. В связи с этим возникает задача оптимизации процесса решения в соответствии с какой-либо целевой функцией (критерием эффективности или качества), которая является достоверным признаком оптимальности. Необходимо найти минимум или максимум этой функции, в зависимости от постановки задачи. Задача, допускающая лишь одно решение, не требует оптимизации.

Таким образом, следует внести уточнения в общее определение оптимизации. Оптимизация – это не только процесс нахождения наилучшего решения из множества возможных, но и математическое подтверждение сделанного выбора с точки зрения минимума или максимума целевой функции. «В мире не происходит ничего, в чём не был бы виден смысл какого-нибудь минимума или максимума» (Л. Эйлер).

В упрощённом варианте постановку оптимизационной задачи можно сформулировать следующим образом: требуется найти такие значения проектных параметров (переменных), при которых целевая функция достигнет минимального или максимального значения. Как правило, большинство оптимизационных задач являются задачами на минимизацию целевой функции. В то же время любая задача на максимум сводится к задаче на минимум путём изменения знака целевой функции. Поэтому для удобства изложения будем оперировать термином «минимизация», так как данная формулировка задачи является универсальной.

Оптимизационные задачи делятся на два типа: безусловные (без ограничений) и условные (с ограничениями). Безусловная задача оптимизации состоит в отыскании экстремума целевой функции без каких-либо ограничений области изменения параметров. Условная задача оптимизации – это задача, в которой на области изменения параметров накладываются некоторые ограничения в виде уравнений или неравенств, т.е. области изменения параметров ограничены [95, 160, 166].

Как упоминалось ранее, решением оптимизационных задач занимается математическое программирование. Эта область математики делится на несколько разделов: линейное программирование, нелинейное (или выпуклое),

дискретное, динамическое и стохастическое. В каждом разделе решаются оптимизационные задачи определённого типа.

В **линейном программировании** целевая функция является линейной, а ограничения, которые накладываются на параметры (переменные), задаются в виде линейных уравнений или неравенств. Впервые линейное программирование было использовано при экономических расчётах. Данные задачи решались с помощью геометрического метода, который является простым и наглядным, однако работает только, когда число переменных не больше трёх. В связи с этим линейное программирование не было популярным, так как в большинстве практических задач целевые функции зависят от большего числа параметров (т.е. $m > 3$). Поэтому только после создания в 1947 году Д. Данцигом симплекс-метода [56, 73, 160] линейное программирование получило широкое распространение в разных областях науки и техники. Симплекс-метод является универсальным методом линейного программирования, так как позволяет решать линейные задачи с любым числом переменных.

В недавнем прошлом линейное программирование применялось в геодезии при проектировании, например, для определения оптимальных высот геодезических знаков [158], а также при планировании и организации полевых геодезических работ [17], однако в настоящее время эти области применения уже неактуальны.

Нелинейное программирование имеет дело с оптимизацией нелинейных функций при линейных и (или) нелинейных ограничениях параметров, т.е. целевая функция и (или) связи между параметрами нелинейные. Нелинейные задачи сложны, разнообразны и часто встречаются в производственной деятельности [7, 12, 19, 53, 73, 102, 105, 165]. В области нелинейного программирования не существует универсального метода, который позволял бы решать любые нелинейные задачи, подобного симплекс-методу в линейном программировании [102, 165].

Методы нелинейного программирования разнообразны. Алгоритмы их программной реализации описываются во многих учебниках, пособиях и учебно-

методической литературе технического, физического и математического профиля [7, 13, 19, 46, 48, 52, 84, 102, 108, 118, 160, 165]. Глобально методы нелинейного программирования делятся на два типа:

- поисковые (прямые) методы, т.е. не требующие вычисления производных целевой функции, например, случайного поиска, исключения отрезков, перебора, Хука-Дживса и др.;
- методы, использующие производные целевой функции, например, метод Ньютона, градиентного спуска, средней точки и др.

В прямых методах единственным требованием, предъявляемым к целевой функции, является возможность определения её значения в заданной точке. Также упрощается задание целевой функции – она может являться недифференцируемой и необязательно задаваться в аналитическом виде.

Достоинством методов с использованием производных по сравнению с поисковыми методами является более высокая эффективность, которая достигается за счёт предъявляемых к целевой функции требований. Во-первых, она должна быть дифференцируемой или дважды дифференцируемой, во-вторых, необходима возможность вычисления производных целевой функции в любой произвольно выбранной точке.

При выборе метода решения нелинейной оптимизационной задачи необходимо учитывать:

- количество параметров (переменных);
- унимодальность или многомодальность целевой функции;
- выпуклость целевой функции;
- дифференцируемость целевой функции;
- наличие ограничений области параметров.

Решение задач нелинейного программирования значительно более трудоёмко по сравнению с задачами других разделов математического программирования. К настоящему времени разработано большое количество методов нелинейного программирования и их модификаций, потому что при постановке задач нелинейной оптимизации заранее нельзя точно сказать, какой из

них будет наиболее эффективен. Следовательно, требуется исследование работы разных алгоритмов с учётом специфики поставленной задачи, а иногда и разработка абсолютно нового метода.

В геодезии методы нелинейного программирования (особенно методы Ньютона и сопряжённых градиентов) получили достаточно широкое распространение, в основном, при уравнивании геодезических сетей [1, 10, 25, 29, 66, 67, 95, 96, 100, 113, 124, 129, 130, 131, 155, 159, 174].

Дискретное программирование – раздел математического программирования, в котором при решении задач оптимизации на параметры целевой функции налагаются условия целочисленности, а область допустимых решений конечна. Задачи дискретного программирования – это задачи с физической неделимостью (т.е. дискретностью) каких-либо факторов или объектов. Наиболее распространены подобные задачи в экономике.

Методы дискретной оптимизации делятся на две основные группы: точные и приближённые. Среди точных методов есть универсальные (метод отсечений, метод ветвей и границ) и специальные, которые учитывают особенности различных задач. Несмотря на то, что конечность точных методов теоретически доказана, эти методы при решении многих экспериментальных задач имеют слабую сходимость. Поэтому появились приближённые методы, при разработке которых были приняты стратегии специальных точных методов. Эти методы имели два пути развития. Первый – разработка эвристических алгоритмов, не являющихся абсолютно точными или оптимальными, но точности которых, достаточно для решения поставленной задачи. Эти методы применимы в случаях, когда точное решение не нужно или не может быть найдено. Эвристические алгоритмы нашли широкое применение при создании искусственного интеллекта [20]. Второй – разработка алгоритмов для локальной оптимизации с применением методов случайного поиска [102].

Динамическое программирование сформировалось в конце 40-х годов XX века. Основоположник данной области математического программирования – Р. Беллман [15, 16]. Методы динамического программирования решают

оптимизационные задачи, структура которых разделена на этапы, например, задачи экономического планирования имеют естественное разделение по времени: год, квартал, неделя, час и т.п.

«Динамика» задач динамического программирования заключается в методике решения, так как во многих задачах этой области параметр времени вообще не фигурирует, а разделение на этапы вводится искусственным образом. Главная идея методов динамического программирования предельно проста [170] – поэтапная оптимизация, при которой этапы не изолированы друг от друга, и действия на каждом этапе выбираются с учётом результатов предыдущих оптимизаций. Можно разбить сложную оптимизационную задачу на ряд более простых, так как оптимизация одного этапа, как правило, проще оптимизации всего процесса в целом. Чем проще задача каждого этапа, тем более простой метод можно применять для её решения.

В области динамической космической геодезии решаются, например, задачи оптимизации движения искусственных спутников Земли (ИСЗ) в неоднородном гравитационном поле, выведения уравнений Лагранжа для возмущений элементов орбиты ИСЗ и т.п. [27, 28]. Основным математическим аппаратом для решения подобных динамических задач служат теория гравитационного поля Земли и теория шаровых и сферических функций. Также в области спутниковой геодезии с помощью методов динамического программирования решается труднейшая математическая задача – уточнение геопотенциала Земли [117].

В прикладной геодезии методами динамического программирования решаются задачи оптимального разбиения объекта (территории) на подучастки [93], также эти методы используются при уравнивании геодезических сетей, если есть необходимость учёта их многоэтапной структуры [39].

В стохастическом программировании, в основном, решаются задачи оптимизационного планирования, управления и распределения ресурсов. Методы стохастического программирования направлены на решение условных экстремальных задач при недостаточности исходной информации [171]. Различают следующие методы стохастического программирования:

- пассивные – решают оптимизационные задачи со случайными исходными данными;
- активные – с учётом рисков и неопределённости.

Стохастические методы опираются на теорию случайных функций, основными инструментами которой являются теория вероятности и математическая статистика. Например, программный пакет SpatialAnalyzer [141, 142] при проектировании (предрасчёте точностей сетей) использует стохастическое моделирование, искажая тысячи раз предполагаемые измерения погрешностями и анализируя распределение полученных результатов в пространстве [45].

Методы стохастического программирования применяются при анализе точности геодезических измерений величин, изменяющихся во времени, их математико-статистической обработке и проектировании этих измерений. Теорию случайных процессов применяют в исследованиях точности изображения рельефа на топографических картах, при выборе методов построения фотограмметрических сетей и т.д. [30, 31, 111]. Особенно важным является привлечение теории случайных процессов при создании автоматизированных аэрофотограмметрических и картографических систем, автоматизированных систем геодезических измерений для математической и графической обработки результатов этих измерений, решении задач инженерной и космической геодезии [37, 38, 103].

Из приведённого краткого описания разделов математического программирования видно, что методы решения оптимизационных задач очень разнообразны, применяются при различных условиях, часто пересекаются, имеют частные случаи. Математическое программирование – постоянно развивающаяся область прикладной математики. Технологический прогресс не стоит на месте. Усложнение известных оптимизационных задач и появление новых требует развития методов их решения.

Среди разделов математического программирования особо перспективным является нелинейное программирование, так как большинство практических задач

носят нелинейный характер. Методы нелинейного программирования обладают огромным потенциалом, так как их стратегии не только легко адаптируются для решения широкого круга прикладных задач, но и являются при этом весьма эффективными [108, 165].

1.2 Оптимизационные задачи в геодезии

В настоящее время методы математического программирования находят применение в широком спектре оптимизационных геодезических задач [1, 57, 59, 60, 62, 70, 89, 90, 94, 95, 124, 179].

Самые сложные задачи оптимизации относятся к области космической и высшей геодезии [50]: оптимизация орбит спутниковых систем [3, 58, 156]; оптимизация траекторий космических аппаратов [120, 162, 163,]; уточнение геопотенциала Земли; определение постоянных, характеризующих гравитационное поле Земли, параметров вращения Земли и других геодезических и геодинамических параметров [34, 119, 139]; построение геометрической, гравитационной и динамической моделей фигуры Земли на основе совокупности астрономо-геодезических, гравиметрических и геофизических данных для планетарного, континентальных и региональных масштабов [115].

В фотограмметрии к оптимизационным относятся задачи трансформирования снимков и определения элементов их ориентирования [134]. Также оптимизация имеет место при построении фотограмметрических сетей [30, 31, 161], архитектурных фотограмметрических съёмках [104], создании и обработке цифровых моделей рельефа (ЦМР) [92], обработке космических снимков [44] и т.д.

В прикладной геодезии встречается огромное количество задач оптимизации разной сложности: выверка различных конструкций [2], юстировка и выставление в проектное положение элементов радиотелескопа [62], обработка результатов обмерных работ при лазерном сканировании [33, 148], определение

соосностей цилиндрических (конических) объектов: дымовых труб, печей обжига, копров, градирен, резервуаров, валов [2] и др.

Один из самых распространённых примеров оптимизационных задач в геодезии – это уравнивание различных геодезических сетей. Как правило, даже самые простые геодезические построения содержат избыточные данные, при этом возникает неоднозначность конечных результатов, которая устраняется посредством уравнивания.

Большинство оптимизационных геодезических задач являются нелинейными, следовательно, методы нелинейного программирования имеют более широкое распространение в геодезической практике по сравнению с другими методами математического программирования.

Теоретические исследования и практическое применение методов нелинейного программирования при решении оптимизационных геодезических задач представлены в работах многих учёных-геодезистов: А.В. Зубова, В.А. Коугия, Г.В. Макарова, Ю.И. Маркузе, В.И. Мицкевича, М.Я. Брыня, М.И. Коробочника и др.

Спектр применения методов нелинейного программирования в геодезии достаточно широк:

- уравнивание геодезических сетей на плоскости, эллипсоиде и в пространстве [124, 125, 126];
- уравнивание инженерно-геодезических сетей и других геодезических построений [24, 29, 129, 130, 172];
- оптимальное проектирование рельефа на плоскости, под топографическую поверхность, под систему плоскостей [93, 94];
- построение прогнозной модели для выполнения наблюдений за осадками зданий и сооружений [23];
- оптимизация режимов функционирования RTK GPS геодезических сетей для кадастровых измерений [128];
- определение градиентным методом элементов связи между трёхмерными системами координат [96, 97];

- применение градиентного метода при решении геодезических задач [66, 67];
- аппроксимация результатов обмеров окружность различными поисковыми методами [69, 71, 72] и др.

Вопросы оценки точности поисковых методов нелинейного программирования при уравнивании рассмотрены в трудах Г.В. Макарова [114].

1.3 Выводы по Главе 1

Из представленного в данной главе обзора следует, что оптимизационные задачи являются не редкостью во всех областях геодезии. Развитие и внедрение цифровых методов и оборудования способствовали появлению новых оптимизационных задач. Стремительное расширение круга решаемых задач и сокращение сроков их выполнения в условиях производственного цикла привело к тому, что современная геодезия неразрывно связана с компьютерной техникой и программным обеспечением.

Для решения оптимизационных геодезических задач целесообразно внедрять методы нелинейного программирования в процесс производства, а также их дальнейшее совершенствование с учётом особенностей решаемых задач.

Как правило, при решении задач оптимизации в геодезии применяют методы, основанные на вычислении производных. Поисковые методы рассматриваются в контексте сравнения в другими методами при решении какой-либо конкретной задачи. На данный момент в геодезии существуют лишь единицы отработанных методик, в рамках которых стратегии поисковых методов адаптированы для решения геодезических задач.

Целью работы является повышение информативности, эффективности и оперативности процесса обработки геодезических измерений за счёт разработки и использования поисковых методов. Для достижения поставленной цели решались задачи как теоретического, так и практического характера, направленные на глубокое изучение теории оптимизации и поисковых методов, оценку целесообразности их применения, выявление достоинств и недостатков

конкретных методов, проверку их эффективности, разработку на их основе программных комплексов для автоматизированного решения инженерно-геодезических задач.

ГЛАВА 2 МЕТОДЫ ПОИСКОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

2.1 Постановка задачи оптимизации при использовании поисковых методов

При выборе метода решения для оптимизационной задачи обязательно следует учитывать [160]:

- корректность постановки задачи;
- сходимости метода;
- чувствительность (устойчивость) метода решения к погрешностям исходных данных;
- достоверность вычислений.

Возможность оценки достоверности результатов вычислений является важнейшим вопросом при определении надёжности выбранного метода решения.

Задача оптимизации является устойчивой, если малое изменение исходных параметров приводит к малому изменению искомой величины. Отсутствие устойчивости означает, что даже незначительные погрешности в исходных данных приводят к большим погрешностям в решении или вовсе к неверному результату.

Задача оптимизации является поставленной корректно, если для любых исходных данных существует единственное и устойчивое решение из некоторого класса её решений.

Сходимость метода оптимизации характеризует близость полученного решения задачи к истинному значению, т.е. точность вычислений.

Таким образом, чтобы получить решение оптимизационной задачи с необходимой точностью, её постановка должна быть корректной, выбранный метод решения должен быть устойчивым и обладать сходимостью.

Поисковые (прямые) методы основаны на итерационной процедуре – постепенном уточнении решения поставленной задачи.

Принцип решения задачи посредством поиска присущ человеческому поведению. Даже в повседневной жизни человек постоянно находится в процессе

поиска, например, выбор подарка другу, выбор дороги на работу, выбор вещи для покупки, т.е. решение какой-либо бытовой задачи с минимальными затратами сил, времени, денег и т.п. В производственной и научной сферах поиск также является неотъемлемой частью деятельности инженера, исследователя, рабочего и др. Например, проведение эксперимента при определённых условиях, изменение этих условий на основании теоретических исследований, результатов предыдущего эксперимента, опыта экспериментатора и т.п. Таким образом, осуществляется нахождение оптимального решения путём перебора возможных вариантов (при изменении условий достижения решения). Типичным примером поисковой оптимизации в геодезии является рекогносцировка местности.

Поисковые методы не используют производные, а направление минимизации полностью определяется на основании последовательных вычислений целевой функции. Общий принцип поисковых методов заключается в последовательном многократном вычислении целевой функции при изменении каждый раз одной или нескольких переменных в ту или иную сторону до тех пор, пока не будет достигнут её минимум.

При решении простых задач поисковые методы сходятся медленнее, чем методы с использованием производных, однако на практике прямые методы являются более удобными с точки зрения пользователя. Во-первых, если целевая функция зависит от большого числа переменных, то достаточно трудно получить численные значения производных. А методы поиска не требуют регулярности и непрерывности целевой функции, а также существования производных, что значительно упрощает процесс задания качественной целевой функции. Во-вторых, необходимость вычисления производных значительно усложняет подготовительный этап, а при использовании прямых методов время на подготовку задачи к решению сводится к минимуму.

При решении задачи оптимизации поисковым методом необходимо:

- задать целевую функцию;
- задать начальное значение параметра (-ов) $x_1, x_2 \dots x_m$;

- задать начальный шаг изменения параметра $\Delta x_1, \Delta x_2 \dots \Delta x_m$ (если параметров несколько, то шаг задаётся отдельно для каждого из них);
- определить условия и коэффициент p изменения шага параметров;
- определить условие остановки поискового процесса.

Целевая функция – это глобальный критерий оптимальности, применяемый при решении инженерных и экономических задач, создании математических моделей объектов или процессов.

Как правило, целевая функция задаётся в скалярном виде. Существуют четыре формы её задания [2, 55, 167]:

1. Целевая функция одного параметра (1):

$$F = f(x) = x. \quad (1)$$

В данном случае целевая функция равна одному параметру или его обратной величине. Обычно в качестве параметра выступает какой-либо технологический показатель: точность, быстродействие, время, стоимость, надёжность, масса, габариты и т.д. Если задача оптимизации включает другие параметры, то они переводятся в систему ограничений.

2. Сумма параметров одной размерности (2) или сумма функций от этих параметров (3):

$$F = f(x_1, x_2 \dots x_m) = x_1 + x_2 + \dots + x_m; \quad (2)$$

$$F = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_m(x_m). \quad (3)$$

Данные формы целевой функции наиболее часто применяются в экономике.

3. Ранжированная форма представляет собой упорядоченную совокупность целевых функций одного параметра, при необходимости с указанием приоритетных целевых функций (4):

$$F = \begin{cases} f_1(x_1) \\ f_2(x_2) \\ \dots \\ f_m(x_m) \end{cases}. \quad (4)$$

Такая форма, как правило, применяется для задания целевой функции при многошаговой оптимизации, т.е. в динамическом программировании.

4. Целевая функция в виде зависимости от всех искомых параметров (5):

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (5)$$

где x_1, x_2, \dots, x_m – проектные параметры (переменные), m – количество этих параметров. Целевая функция является функцией одной переменной, если $m = 1$; функцией двух переменных – если $m = 2$ и т.д.

Это самая распространённая форма задания целевой функции. Она является универсальной (применима практически для всех оптимизируемых объектов, процессов, моделей и т.п.). Также при задании целевой функции по форме (5) проектные параметры могут быть разного именованя, т.е. измеряемыми в разных единицах.

В геодезической практике термин «целевая функция» употребляется, как правило, в контексте использования методов математического программирования. Наиболее распространёнными были и остаются целевые функции на основе метода наименьших квадратов $F = \sum V_i^2$ (где V_i – поправки к результатам измерений) [8, 110, 147], реже встречаются целевые функции на основе метода наименьших модулей $F = \sum |V_i|$ [123], практически не используются целевые функции в виде суммы поправок $F = \sum V_i$. Также существует множество теоретических и практических разработок, доказывающих целесообразность применения метода Lp-оценок для задания целевой функции [41, 112, 122].

Выбор вида целевой функции зависит от физической сущности задачи. Наиболее распространённый и эффективный её вид основывается на методе наименьших квадратов (МНК).

МНК является неотъемлемой частью при обработке геодезических измерений [109, 112, 135]. Он лежит в основе строгих методов уравнивания (параметрического и коррелятного).

Целевая функция, основанная на методе наименьших квадратов, наиболее эффективна по сравнению с целевыми функциями общего вида, поскольку она квадратична, поэтому значительно упрощается нахождение её глобального минимума.

Однако такой критерий оптимальности является максимально правдоподобным только для случая, когда отклонения подчиняются нормальному распределению (распределению Гаусса). Как правило, в геодезии погрешности измерений имеют нормальное распределение, однако у некоторых измерительных приборов оно иное, и это следует учитывать. Например, если есть основания полагать, что отклонения результатов измерений подчиняются двухстороннему распределению Лапласа, то для задания максимально правдоподобной целевой функции следует использовать метод наименьших модулей (МНМ).

Вопрос исследования эффективности целевых функции различных видов находится вне темы рассматриваемой диссертации. Основываясь на своих знаниях и опыте исследования, автор в рамках своей работы использует целевые функции на основе метода наименьших квадратов, хотя при поисковых методах переход к другим целевым функциям очень прост.

Остальные аспекты, которые необходимо установить перед решением задачи оптимизации (начальные значения параметров, начальный шаг изменения параметров, условие изменения шага, условия остановки поискового процесса и т.д.) определяются выбранным методом решения и точностными требованиями определения параметров.

В большинстве методов поисковой оптимизации величины $(x_1, x_2 \dots x_m; \Delta x_1, \Delta x_2 \dots \Delta x_m; p)$ косвенно связаны между собой. Очень важным является выбор шага, так как непосредственно от его величины зависит количество циклов, т.е. скорость, с которой значение целевой функции приближается к минимуму. Если задать начальные значения параметров, далёкими от их истинных значений, тогда необходимо подобрать шаг, который соизмерим с разницей истинных и начальных значений определяемых величин.

В поисковых методах нет определённого критерия, по которому можно уверенно задать величину начального шага. Как правило, его значение определяется экспериментально, методом подбора. Например, В.И. Мицкевич [124] при уравнивании геодезической сети поисковым методом описывает

зависимость начального шага от наименьшей длины стороны между исходным и определяемым пунктами.

Целевая функция может зависеть от параметров, измеряемых в разных единицах, поэтому при задании величин $x_1, x_2 \dots x_m; \Delta x_1, \Delta x_2 \dots \Delta x_m; p$ обязательно следует учитывать размерности параметров. Например, при определении параметров связи двух систем координат на плоскости целевая функция имеет вид (6):

$$f(X, Y, \varphi, t) = \sum_{i=1}^n \left[x_i' - (X + t \cdot x_i \cdot \cos \varphi - t \cdot y_i \cdot \sin \varphi) \right]^2 + \left[y_i' - (Y + t \cdot x_i \cdot \sin \varphi + t \cdot y_i \cdot \cos \varphi) \right]^2 = \min, \quad (6)$$

где X и Y – координаты начала второй системы координат в первой системе координат; φ – угол поворота второй системы координат относительно первой; t – масштабный множитель; x_i и y_i – координаты точек в первой системе координат; x_i' и y_i' – координаты точек во второй системе координат; n – количество точек.

X и Y – линейные величины, заданы в метрах; φ – угловая величина, в секундах; t – безразмерная величина. Следовательно, аргументы имеют разную «чувствительность», т.е. изменение одного из них в большей или меньшей мере будет влиять на величину целевой функции.

Коэффициент изменения шага p зависит от величины начального шага и может принимать разные значения. Например, шаг может дробиться пополам (т.е. $p = 0.5$) или уменьшаться на какой-либо процент от начального значения.

Таким образом, эффективность решения поставленной задачи поисковым методом зависит от вида целевой функции и выбранного метода поиска. Важно помнить, целевая функция должна являться достоверным критерием оптимальности, а поисковый метод – сообразным поставленной задаче.

Несмотря на наличие общего для всех поисковых методов принципа решения, данные методы очень разнообразны. Классические поисковые методы являются одними из численных методов математического программирования и

направлены на решение нелинейных оптимизационных задач. Поисковые методы математического программирования имеют чётко отработанные математические алгоритмы, которые реализованы в различных программных средах [74, 125, 126].

Помимо математического программирования поисковые методы используются в эволюционном моделировании. Генетические алгоритмы, генетическое программирование, эволюционные стратегии и пр. представляют собой поисковые стратегии. С их помощью решаются задачи оптимизации с использованием механизмов, аналогичных естественному отбору в природе. Основная идея этих алгоритмов – перевод эволюционной теории на язык программирования [85]. Поисковые методы эволюционного моделирования по сравнению с поисковыми методами математического программирования основываются на принципе случайного изменения параметров и имеют более простой механизм реализации.

Таким образом, поисковые методы варьируются от самых простых, основанных на принципе случайного нахождения оптимального решения (например, генетические алгоритмы), до более сложных, которые по своей сути близки к методам, использующим производные (например, методы квадратичной аппроксимации).

2.2 Стратегии поисковых методов

Ни в одном источнике не приводится полный перечень существующих поисковых методов, так как постоянно разрабатываются новые методы и модифицируются старые. Это связано, в первую очередь, с усложнением технических задач, которые требуют своего решения. Кроме того постоянное совершенствование вычислительной техники обеспечивает применение поисковых методов в таких областях человеческой деятельности, в которых ранее это было невозможно.

Теория поисковых методов и их реализация при решении конкретных задач представлена в большом количестве литературных источников [11, 12, 18, 85, 108,

165], то есть многие из них являются специализированными, например, задачи планирования, распределения ресурсов, моделирования, экономические, технические и т.д.

Также не существует чёткой классификации поисковых методов. Как правило, их классифицируют по некоторым формальным признакам, позволяющим оценить эффективность метода в зависимости от характеристики поставленной задачи.

В данном разделе дано краткое описание наиболее распространённых поисковых методов и приведена их условная классификация с точки зрения схожести стратегии поиска.

2.2.1 Поисковые методы одномерной оптимизации

Самым простым поисковым методом является **метод перебора** (или равномерного поиска) [108, 116]. Данный метод может работать с многомодальными функциями. Известен отрезок $[a; b]$ из области определения, на котором находится оптимальное значение переменной x^* ($x^* \in [a; b]$). Этот отрезок разбивается на конечное число отрезков, в каждой точке разбиения вычисляется значение целевой функции. Решением считается значение переменной в точке, где целевая функция минимальна. Количество отрезков разбиения зависит от требуемой точности, с которой необходимо определить x^* .

Недостаток метода перебора – это многократное вычисление целевой функции, которое является неоправданным по сравнению с другими поисковыми методами.

Метод поразрядного поиска и **методы исключения отрезков** (первый метод деления отрезка пополам (дихотомии), метод золотого сечения и второй метод деления отрезка пополам) [108, 116] являются усовершенствованием метода перебора с целью уменьшения количества вычислений целевой функции. Данные методы основаны на процедуре последовательного уменьшения (сужения) отрезка, содержащего точку минимума.

Недостатком этих методов по сравнению с методом перебора является требование унимодальности, предъявляемое к целевой функции.

К методам минимизации многомодальных функций относится **метод ломанных** [108], основанный на кусочно-линейной аппроксимации целевой функции. Недостатком данного метода является использование дополнительных построений графиков ломанных и вычисление вспомогательных констант.

Все перечисленные методы работают с функциями одной переменной, следовательно, не применимы к задачам многомерной оптимизации.

2.2.2 Поисковые методы многомерной оптимизации

Прямой поиск

Основная идея методов прямого поиска: одна переменная изменяется до достижения минимума целевой функции, остальные переменные при этом устанавливаются постоянными. При достижении минимума функции по одной переменной, она запоминается и остаётся неизменной, и минимизация выполняется последовательно по остальным переменным. При необходимости может быть произведена повторная минимизация по всем переменным. Существует несколько методов, основанных на интерпретациях данной стратегии.

Стратегия последовательного нахождения направлений убывания функции и минимизации её по этим направлениям лежит в основе ряда алгоритмов.

Метод Хука-Дживса – минимизация целевой функции осуществляется за счёт поочерёдного изменения (уточнения) параметров. Схема решения задачи оптимизации данным методом для случая целевой функции двух переменных представлена на рисунке 1.

Метод Хука-Дживса включает следующие этапы [165]:

1) «Исследующий поиск» типа I проводится вокруг базисной точки. При каждом изменении переменных вычисляется целевая функция и сравнивается её значение с предыдущим. Если целевая функция при данном изменении переменной

уменьшилась, то её старое значение заменяется новым, в противном случае сохраняется старое значение целевой функции. «Исследующий поиск» типа I необходим для определения направления минимизации (улучшения) целевой функции.

2) «Поиск по образцу» проводится по направлению, выбранному на предыдущем этапе.

3) «Исследующий поиск» типа II производится для оценки «поиска по образцу», т.е. для подтверждения или опровержения правильности выбранного направления минимизации.

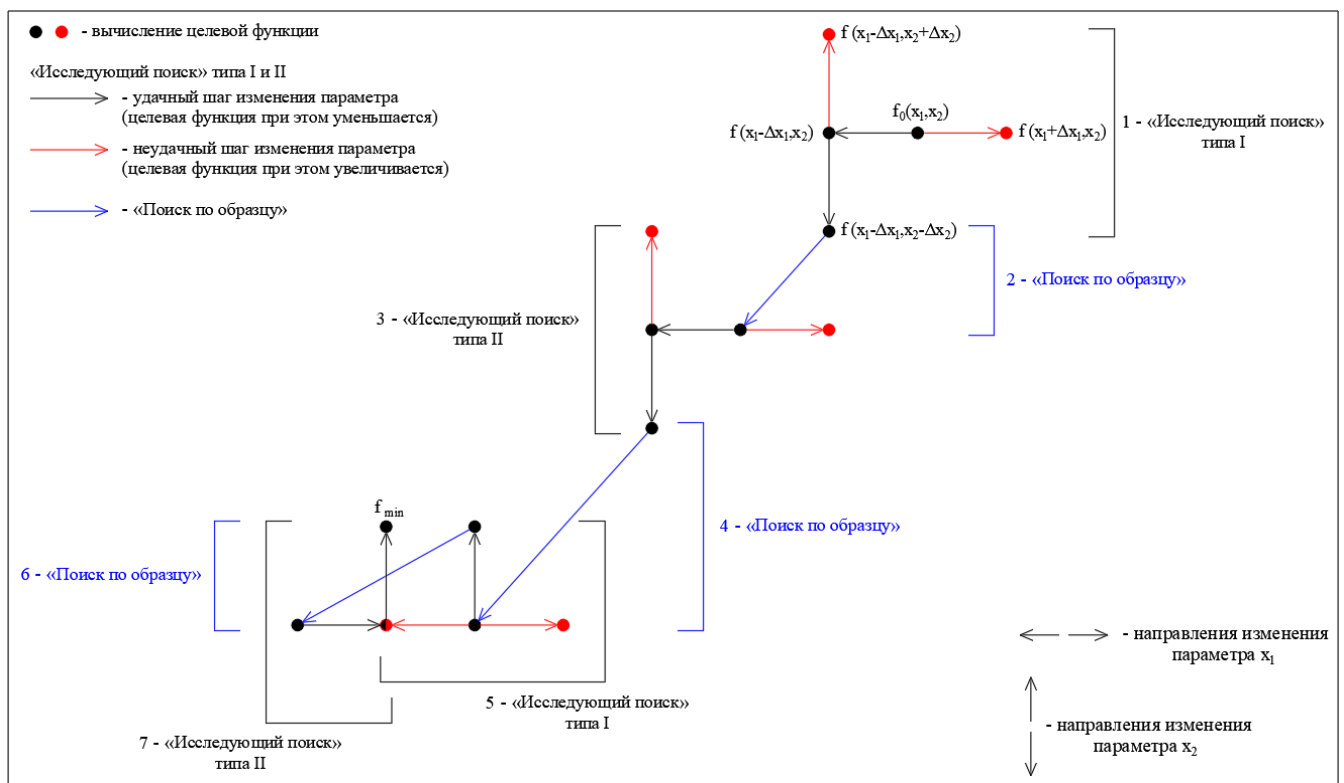


Рисунок 1 – Схема решения оптимизационной задачи методом Хука-Дживса

Недостатки метода Хука-Дживса:

- при выполнении «исследующего поиска» типа I для определения направления минимизации вычисление целевой функции производится несколько раз;
- для оценки «поиска по образцу» необходимость проведения дополнительного «исследующего поиска» типа II;
- в случае неудачного «поиска по образцу» необходимость возврата к «исследующему поиску» типа I для определения нового направления

минимизации, следовательно, действия, выполненные до этого на этапах «поиска по образцу» и «исследующего поиска» типа II, оказываются необязательными;

- наличие дополнительных условий для осуществления перехода от одного типа поиска к другому;

- сложность остановки поискового процесса, так как условия остановки должны быть выполнены на этапах поиска всех типов;

- величина изменения шага минимизации зависит от количества последовательных неудач в исследующих поисках, эта величина задаётся не номинально, а рассчитывается по формуле [165].

Данные недостатки значительно усложняют программную реализацию метода Хука-Дживса.

На основе идеи данного метода, но со значительным упрощением алгоритма был разработан **метод прямого поиска с переменным шагом**. Рассмотрим приведённый метод на примере целевой функций двух переменных $f(x_1, x_2)$. Последовательность действий данного метода следующая:

1) Вычисление целевой функции при начальных значениях параметров $f_0(x_1, x_2)$.

Изменение одного параметра на шаг и вычисление целевой функции $f(x_1 + \Delta x_1, x_2)$.

2) Если её значение уменьшилось $f_0(x_1, x_2) > f(x_1 + \Delta x_1, x_2)$, значит, направление минимизации выбрано верно. При этом параметр изменяется на тот же шаг, и целевая функция вычисляется ещё раз (рисунок 2а).

3) Если значение целевой функции увеличилось $f_0(x_1, x_2) < f(x_1 + \Delta x_1, x_2)$, тогда нужно изменить направление шага и ещё раз вычислить целевую функцию $f(x_1 - \Delta x_1, x_2)$. Если её значение уменьшилось, направление минимизации выбрано верно, параметр изменяется на тот же шаг, и целевая функция вычисляется ещё раз (рисунок 2б).

4) Если же изменение направления шага параметра не приводит к уменьшению целевой функции, тогда необходимо вернуться к начальному значению целевой функции и изменить кратность шага $x_1 + \Delta x_1 \cdot p$ (рисунок 2в).

После выбора верного направления изменения одного параметра, например, $x_1 + \Delta x_1$, переходят к следующему параметру. Таким образом, оптимизация осуществляется по очереди то по одному, то по другому параметру. На рисунке 3 представлена упрощённая визуализация данного алгоритма.

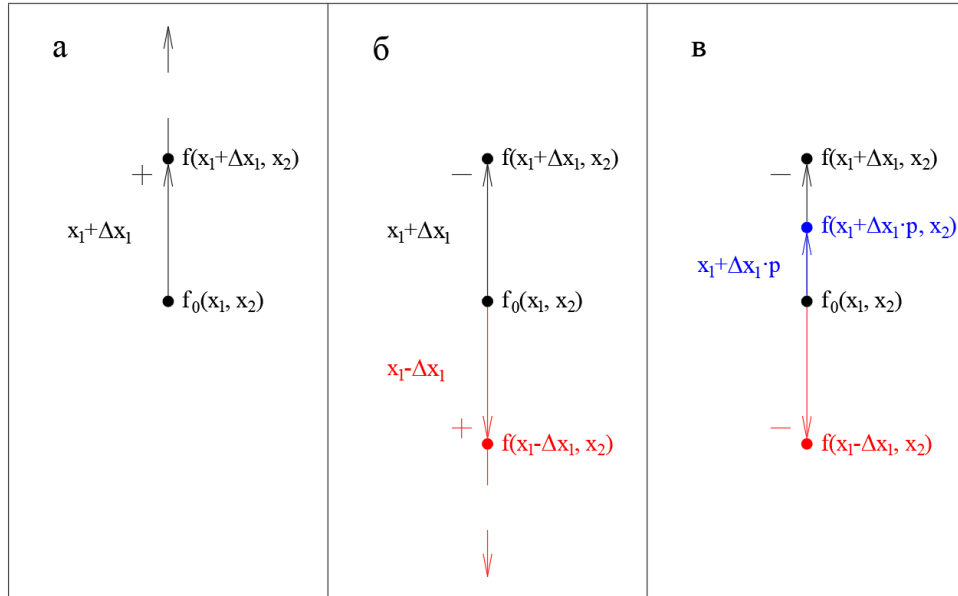


Рисунок 2 – Варианты «поведения» целевой функции в зависимости от величины шага и направления изменения параметра

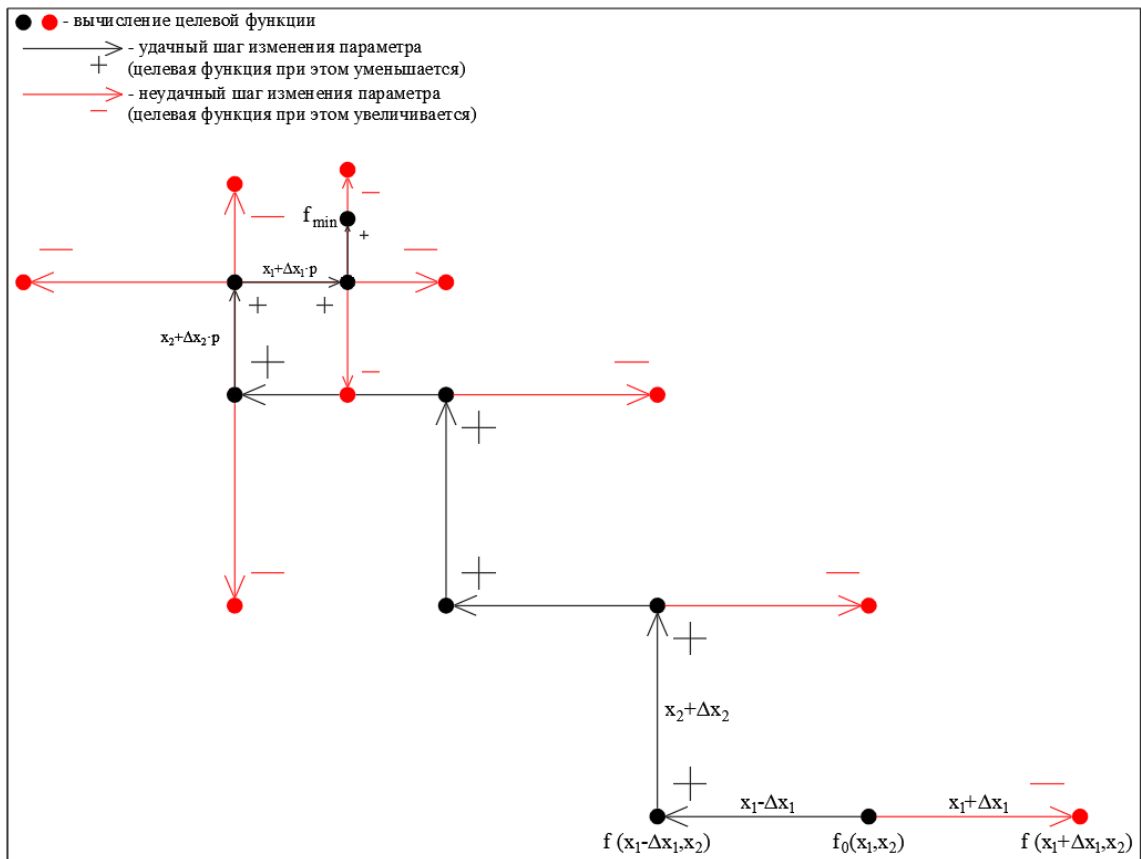


Рисунок 3 – Схема решения оптимизационной задачи по методу простого поиска с переменным шагом

Метод прямого поиска с переменным шагом протестирован при решении нескольких геодезических задач, полученные результаты показали его эффективность и работоспособность [68, 180].

В методах прямого поиска используются априорные сведения о значениях целевой функции для определения направления её минимизации. В то же время после нахождения верного направления устаревшее значение заменяется новым.

Поиск по деформируемому многограннику

Данный метод является модификацией симплексного метода линейного программирования; он более сложный, чем стратегии прямого поиска, однако весьма эффективен и достаточно легко реализуется в виде программы [168].

Рассмотрим принцип поиска по деформируемому многограннику на примере целевой функции двух переменных $f(x_1, x_2)$. Вычисляется целевая функция при начальных значениях параметров $f_0(x_1, x_2)$. Строится исходный правильный симплекс.

Правильный симплекс – это множество из $m+1$ равноудалённых друг от друга точек (вершин симплекса), где m – количество переменных. В случае целевой функции двух переменных симплекс – это равносторонний треугольник, если переменных три, то симплекс – это тетраэдр и т.д.

Координаты вершин начального симплекса задаются по правилам аналитической геометрии [108], при этом центром тяжести симплекса является начальное значение целевой функции $f_0(x_1, x_2)$. В каждой из вершин симплекса вычисляется целевая функция (рисунок 4а). Определяется вершина, в которой целевая функция максимальна, из неё проводится проектирующая прямая через центр тяжести симплекса. На этой прямой определяются пробные точки с помощью процедур отражения, растяжения и сжатия, в которых вычисляется целевая функция, и выбирается точка с наименьшим значением. Таким образом, определяется новая вершина симплекса (рисунок 4б).

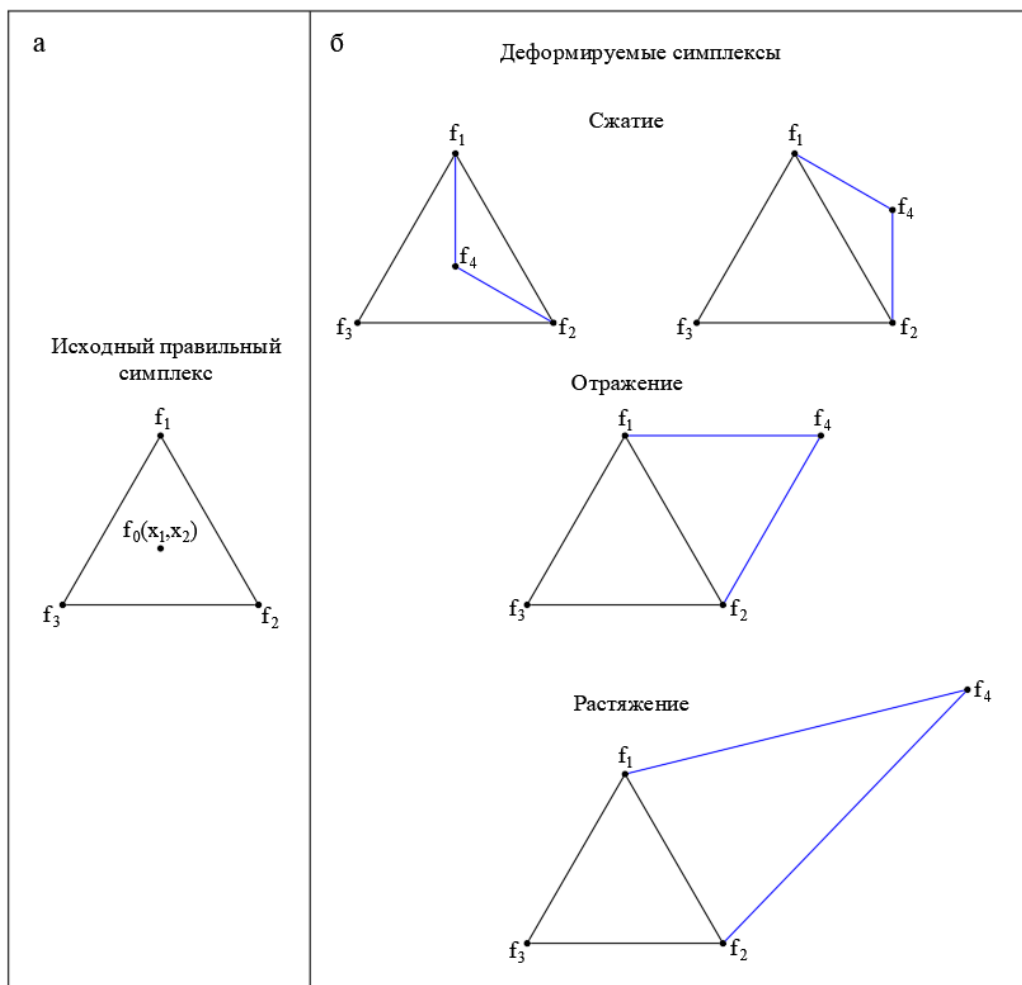


Рисунок 4 – Виды деформаций симплексов

При деформациях (отражении, растяжении, сжатии) утрачивается свойство правильности исходного симплекса. С помощью этих деформаций размеры и форма симплекса адаптируются к топологии целевой функции.

Схема решения задачи оптимизации данным методом для случая целевой функции двух переменных представлена на рисунках 5 и 6. Цифры внутри симплекса обозначают порядковый номер его построения.

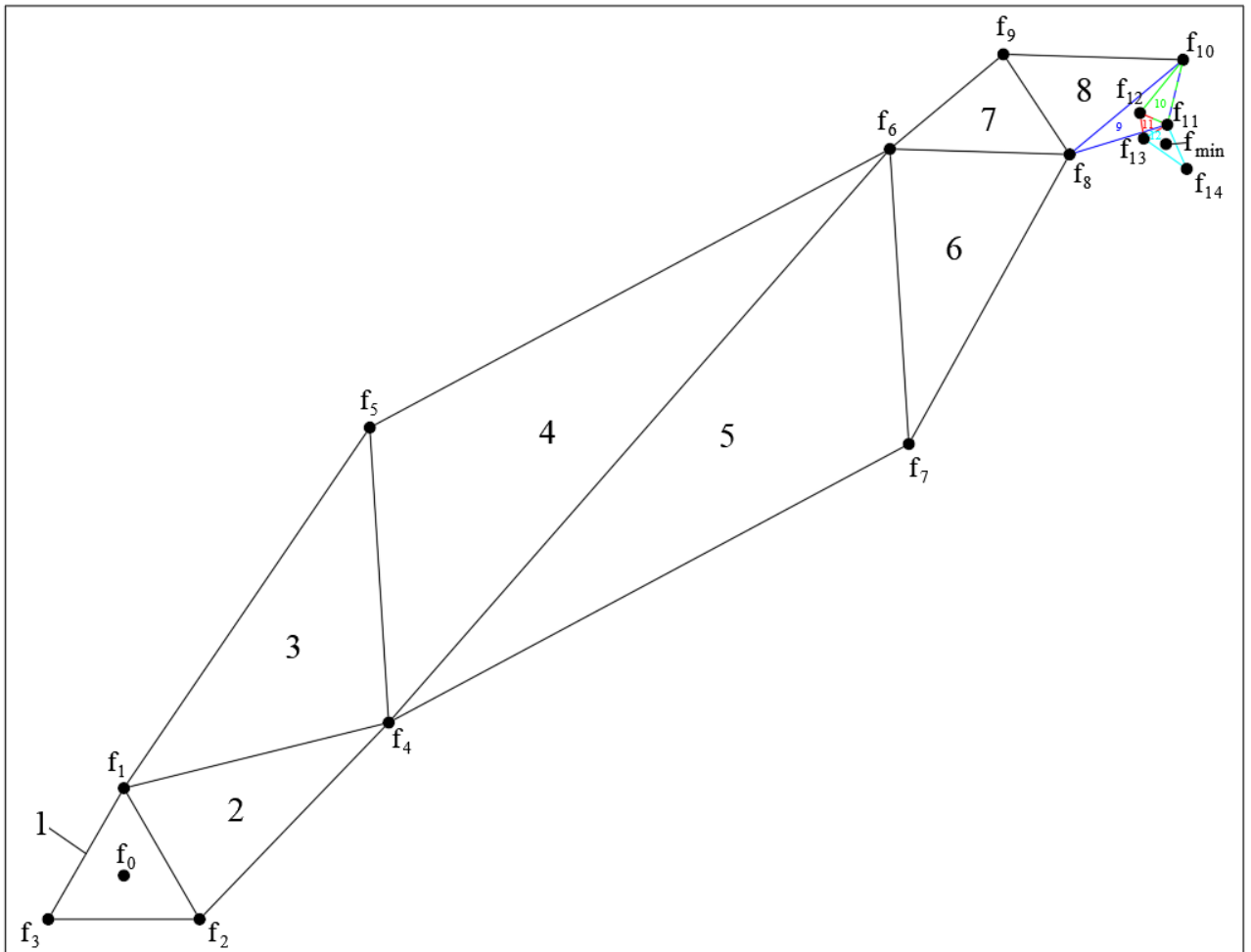


Рисунок 5 – Схема решения оптимизационной задачи по методу деформируемого многогранника

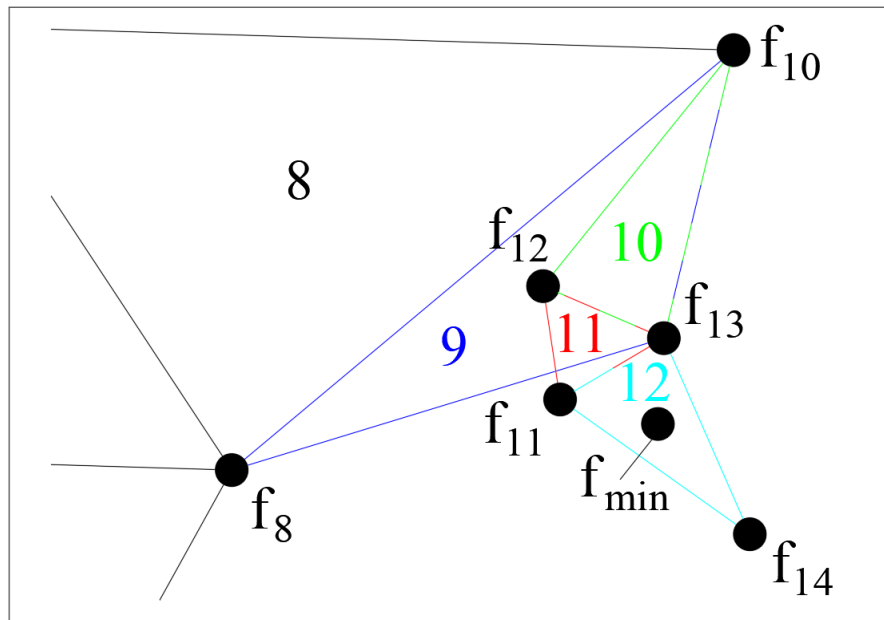


Рисунок 6 – Схема решения оптимизационной задачи по методу деформируемого многогранника (сжатие симплексов в области минимума целевой функции)

Тестовые задачи показали, что метод деформируемого многогранника хорошо работает при количестве переменных не больше шести [108].

Недостаток данного метода: для построения нового симплекса нужно вычислить значение целевой функции как минимум в четырёх точках деформации и выбрать из них целевую функцию с наименьшим значением. В результате решения многочисленных тестовых задач выявлены коэффициенты деформации, при которых данный метод легче адаптируется к топологии целевой функции и требует меньше вычислений. Однако нельзя чётко решить этот вопрос, так как выбор коэффициентов деформации зависит от размера исходного симплекса и его удалённости от точки минимума.

Помимо прочего, во избежание сильных деформаций симплекса (его вырождения), в алгоритм метода деформируемого многогранника добавляют процедуру обновления. Например, после построения определённого числа симплексов, последний деформируемый симплекс заменяется на правильный.

Методы квадратичной аппроксимации

Методы квадратичной аппроксимации выделяются среди поисковых методов. Их основная идея состоит в том, что для целевой функции строится аппроксимирующий многочлен, и его точка минимума служит приближением к истинному (оптимальному) значению искомого параметра.

Методы квадратичной аппроксимации представляют собой особый интерес, так как их стратегии близки к методам с использованием вторых производных.

Главным отличием и достоинством методов квадратичной аппроксимации является значительное приближение к области минимума целевой функции за одну итерацию.

Методы случайного поиска

Методы случайного поиска менее изящны по сравнению с другими методами поисковой оптимизации, так как в них выбор направления минимизации осуществляется не по определённому алгоритму, а случайным

образом. К данным методам относятся: комплексный метод, случайный поиск с постоянным радиусом поиска и случайным направлением, повторяющийся случайный поиск и др.

Родственными с методами случайного поиска нелинейного программирования являются генетические алгоритмы эволюционного моделирования. При детальном рассмотрении этих методов, данная аналогия становится очевидной, так как в генетических алгоритмах направление минимизации целевой функции определяется случайным образом, а сама стратегия этой случайности основана на механизмах эволюционной теории.

2.3 Сравнение поисковых методов с классическими строгими методами уравнивания

Одной из самых распространённых оптимизационных задач в геодезии является уравнивание. На протяжении долгого периода задачи уравнивания решались в основном строгими способами (коррелятным и параметрическим), основанными на методе наименьших квадратов. Путь решения (*mainstream*), например, параметрического метода, широко известен. Необходимо: найти довольно точные предварительные значения неизвестных, связать измерения и неизвестные уравнениями, линеаризовать их, перейти к нормальным уравнениям, решить их и найти поправки к предварительным значениям неизвестных. При этом требуется большая подготовительная работа, но весь вычислительный процесс выполняется обычно один раз. Аналогичным путём решались и другие подобные задачи.

Сравним классические строгие и поисковые методы. Сам процесс уравнивания параметрическим или коррелятным методами занимает меньше времени и требует меньших затрат вычислительной мощности компьютера по сравнению с поисковыми методами. Однако необходимость этапа предобработки значительно всё усложняет и затягивает, а в поисковых методах этап предобработки отсутствует.

Из приведённого сравнения (Приложение А) алгоритмов решения классическими строгими методами (коррелятным и параметрическим) [22, 109] с поисковыми методами видно, насколько упрощён процесс решения поисковыми методами по сравнению с классическими как с точки зрения их программной реализации, так и с точки зрения пользователя.

Поисковые методы обладают рядом достоинств по сравнению с традиционными (классическими) методами:

- простота алгоритма программирования;
- независимость от точности предварительных значений определяемых величин (можно взять значения, далёкие от истинных, процесс решения при этом не нарушится);
- не нужно составлять уравнения поправок или уравнения связи;
- не нужно переходить к системе нормальных уравнений и решать их;
- нет необходимости в линеаризации процесса вычисления.

Однако поисковые методы проигрывают классическим методам в одном. Не существует абсолютно обоснованных алгоритмов решения оптимизационных геодезических задач поисковыми методами. Большинство работ, посвящённых данному вопросу, рассматривают только возможности применения поисковых методов в геодезии и дают общие рекомендации. Существуют лишь единицы отработанных методик применения поисковых методов при решении конкретных геодезических задач [93, 94, 124, 125], в то время как строгие методы уравнивания давно известны, обоснованы, отработаны и общеприняты.

Также помимо программной реализации математических алгоритмов поисковых методов необходимо создание фильтров отбраковки грубоошибочных измерений и осуществление оценки точности полученных результатов. Данные вопросы рассмотрены в пятой главе.

2.4 Рост производительности компьютеров как фактор развития поисковых методов

2.4.1 Предпосылки развития методов нелинейного программирования

Широкое применение и нарастающая популярность методов нелинейного программирования обусловлены развитием компьютерных технологий. Обратимся к истории развития вычислительная техника, так как она является важнейшим компонентом процесса вычислений и обработки данных.

Отметим, что первое серийное механическое счётное устройство (арифмометр), с помощью которого можно было выполнять четыре основные арифметические действия (сложение, вычитание, умножение, деление), появилось примерно в то же время, когда были сформулированы первые концепции методов нелинейного программирования. Дальнейшее развитие вычислительной техники (развитие арифмометров, появление перфокарт, первых программных машин, электронных калькуляторов, аналоговых компьютеров, электромеханических цифровых компьютеров и т.п.) не обеспечивало достаточного фундамента для применения стратегий нелинейного программирования [43, 79, 87, 106, 127, 154], так как даже в самых простых из них требовалось производить многократные вычисления целевой функции (сотни, тысячи, десятки и сотни тысяч, а иногда и более итераций). Обратим внимание, что на один расчёт значения целевой функции приходится значительное количество математических вычислений.

Рассчитаем количество вычислений, необходимых для решения простой оптимизационной нелинейной задачи – аппроксимации результатов обмеров окружностью. Целевая функция метода наименьших квадратов для данной задачи представляет собой сумму квадратов отклонений и имеет вид (7):

$$f(X, Y, R) = \sum_{i=1}^n \left[\sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2} - R \right]^2 = \min, \quad (7)$$

где X и Y – координаты центра окружности; R – радиус окружности; x_i и y_i – плановые координаты точек, измеренных на окружности. Требуется найти такие

значения параметров X , Y и R , при которых целевая функция примет наименьшее значение.

Предположим, что на окружности измерено 1 000 точек; для решения выбран некоторый поисковый метод (т.е. без вычисления производных), при использовании которого, необходимо вычислить целевую функцию 1 000 раз (количество приближений).

Для одной точки нужно выполнить 8 вычислений:

- 1) $x_i - X$ – вычитание;
- 2) $(x_i - X)^2$ – возведение в квадрат;
- 3) $y_i - Y$ – вычитание;
- 4) $(y_i - Y)^2$ – возведение в квадрат;
- 5) $(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2$ – сложение;
- 6) $\sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2}$ – извлечение квадратного корня;
- 7) $\sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2} - R$ – вычитание;
- 8) $\left[\sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2} - R \right]^2$ – возведение в квадрат.

Данные вычисления выполняются для каждой точки на окружности, следовательно, чтобы посчитать квадраты всех отклонений, необходимо выполнить 8 000 вычислений. Суммирование отклонений – это ещё 999 операций сложения. Любой, даже самый простой поисковый метод содержит, примерно, от 50 вычислительных операций, приходящихся на одно приближение, для выполнения сравнения целевой функции с предыдущим значением, изменения шага параметров, проверки условия останова итерационного процесса и т.п. Следовательно, получаем 9 049 вычислений, необходимых для расчёта целевой функции только один раз. В условии приняли, что целевую функцию, необходимо рассчитать 1 000 раз. В конечном итоге, получаем 9 049 000 вычислений для решения простой оптимизационной задачи.

Из приведённых расчётов видно, что несмотря на простоту математических алгоритмов методов нелинейного программирования, для их программной

реализации требовались значительные затраты времени и вычислительной мощности, следовательно, обработка больших объёмов данных указанными средствами вычислений была практически невозможной.

Только начиная с 50-х годов XX века с развитием компьютерной техники, началось постепенное внедрение методов математического программирования, в том числе и методов нелинейного программирования, для решения технических задач. Росту программной реализации разработанных ранее математических итерационных методов способствовали:

- создание первого компьютера для научных расчётов IBM 701 и первого массового компьютера IBM 650 (1953 год);
- разработка формальной системы для проверки корректности программ (1969 год);
- изобретение микропроцессора (1969 год);
- разработка стандарта IEEE 754 для представления чисел с плавающей запятой (1985 год);
- разработка генератора псевдослучайных чисел (1986 год);
- разработки различных языков программирования: Фортран (1953 год), APL (1957 год), BASIC (1964 год), Паскаль(1969 год), C++ и Turbo Pascal (1983 год), Java (1995 год) и др.

Прогресс методов математического программирования был бы невозможен без нарастающей производительности компьютеров.

В настоящее время одной из величин, используемых для измерения производительности компьютеров, является FLOPS (флопс) – это внесистемная единица, показывающая, сколько операций с плавающей запятой в секунду выполняет данная вычислительная система. Поскольку современные компьютеры обладают высоким уровнем производительности, более распространены производные величины от флопс, образуемые путём использования приставок СИ. Одним из важнейших достоинств измерения производительности во флопсах является то, что данная единица до некоторых пределов может быть истолкована как абсолютная величина и вычислена теоретически. Эта особенность даёт

возможность использовать её для оценки результатов работы различных алгоритмов, а также оценить производительность вычислительных систем, которые ещё не существуют или находятся в разработке [83].

Для представления производительности компьютеров будем оперировать величиной «флопс», не вдаваясь в технические характеристики (тактовая частота, разрядность, количество ядер и др.). Данного описания вполне достаточно для вопросов, представленных в работе. В конечном итоге, пользователю важно, чтобы компьютер обеспечил быстрое решение поставленной задачи, а не технические параметры, за счёт которых достигается его быстродействие.

В истории компьютерной техники выделяют следующие этапы развития [140]:

- первое поколение (компьютеры на электронных лампах): достоинство – наличие программной памяти; недостатки – использование десятичной системы счисления, огромные габариты и вес; частные простои, связанные с ремонтом; необходимость в мощной охлаждающей системе;
- второе поколение (компьютеры на транзисторах): повысилась надёжность, уменьшились размеры по сравнению с компьютерами первого поколения;
- третье поколение (компьютеры на интегральных схемах): помимо уменьшения габаритов и увеличения быстродействия, значительно уменьшилась стоимость, что способствовало широкому применению в различных сферах деятельности человека, следовательно, компьютеры становились более специализированными;
- четвертое поколение (компьютеры на больших и сверхбольших интегральных схемах): значительное увеличение быстродействия, снижение стоимости;
- пятое поколение – считается, что компьютеры этого поколения должны стать базой для создания устройств, способных к имитации мышления.

Существует мнение, что к пятому поколению следует относить компьютеры с двухядерными процессорами. С этой точки зрения пятое поколение началось примерно с 2005 года. Однако в настоящее время термин «пятое поколение» является неопределённым и применяется во многих смыслах, поэтому граница между четвертым и пятым поколением является неопределённой. В приложении Б

представлено развитие производительности компьютеров 4-го и 5-го поколений по данным тестов PassMark и LINPACK [143, 153, 157, 186].

Из рисунка 7 очевидно, начиная только с четвёртого поколения, компьютеры могут обеспечить эффективное применение методов нелинейного программирования при решении прикладных технических задач.

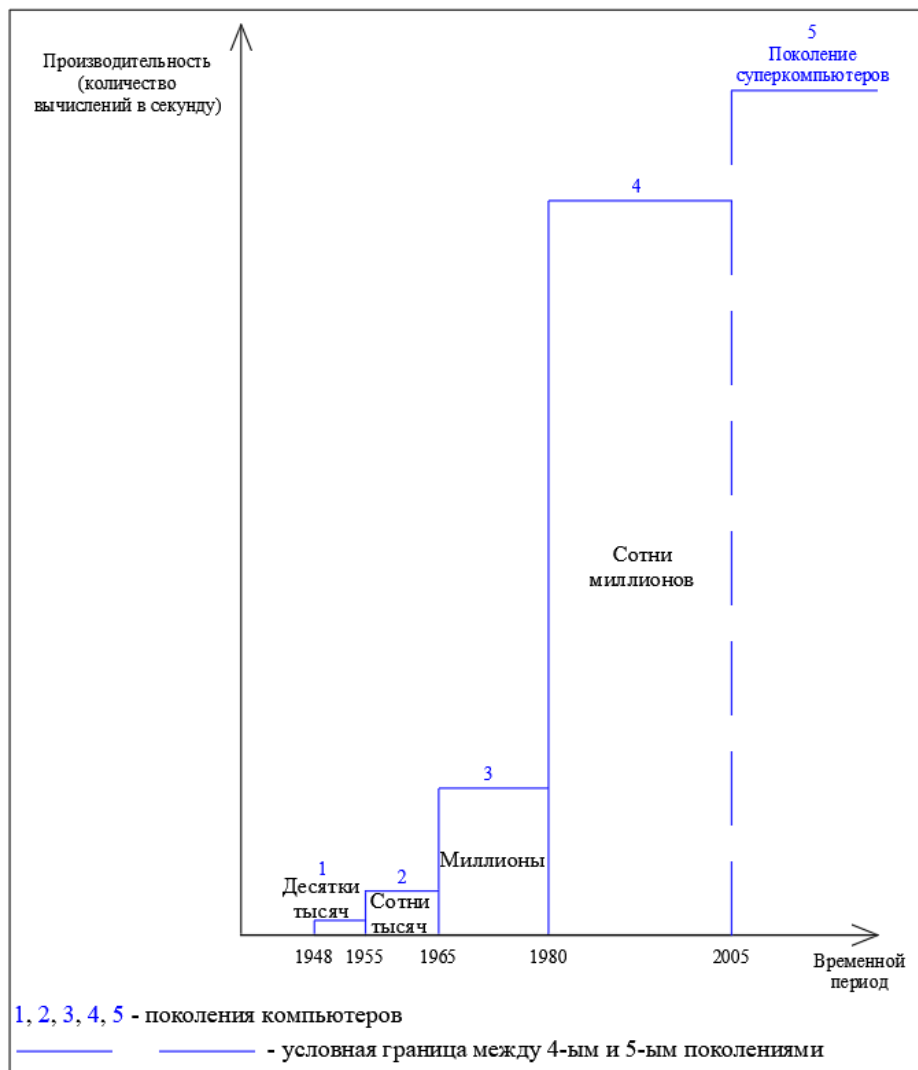


Рисунок 7 – Условная схема производительности компьютеров по поколениям

Отметим, что схема, представленная на рисунке 7, является условной, шкала, отражающая производительность компьютеров не масштабирована и предназначена для визуализации разницы производительности компьютерных поколений.

2.4.2 Взаимосвязь компьютерных технологий и геодезии

Благодаря научно-техническому прогрессу в геодезии произошёл значительный прорыв как на этапе измерений, так и при обработке данных. Современное геодезическое оборудование значительно упростило процесс производства геодезических работ за счёт автоматизации вычислительных процессов.

Развитие электроники, лазерной техники и компьютерных технологий позволило усовершенствовать уже известные приборы и разработать принципиально новые инструменты и технологии. Широкое применение электронных тахеометров, лазерных сканеров, спутникового оборудования позволяет значительно повысить производительность и сократить время выполняемых работ [5, 80, 137].

Отметим, одной из прорывных технологий являются лазерные сканирующие системы, которые отличаются визуализацией, скоростью работы, небывалым уровнем автоматизации сбора больших объёмов данных.

Естественно, рост производительности измерительной техники повлиял на процесс обработки получаемых данных. Развитие любой отрасли, в том числе и геодезии, неразрывно связано с компьютерными технологиями. Взаимосвязь геодезии с техническим прогрессом отражена во многих работах [106, 136, 137, 150, 151]. Например, в статье [99] описывается техническая база цифровой картографии и её связь с развитием компьютерной техники. В статье [4] рассмотрены вопросы развития компьютеров и их влияние на развитие фотограмметрии, также описывается первое действительно серьёзное применение компьютеров для решения фотограмметрических задач – решение вопросов блочной фототриангуляции, т.е. одновременного определения координат всех точек сети и всех параметров ориентации снимков методом наименьших квадратов.

Повсеместное внедрение в геодезии электронных тахеометров позволило автоматизировать процесс первоначального получения координат точек. Без

компьютерных технологий было бы невозможно широкое внедрение аэрофотосъёмки; создание радиокосмических систем; появление всемирных спутниковых координирующих систем, позволяющих с высокой точностью определять координаты любых точек земной поверхности [137].

Приведённые примеры показывают, повышение производительности и вычислительных возможностей компьютерной техники повлекли качественные изменения в геодезии:

- появление новых приборов и методов получения информации: электронные тахеометры, лазерные сканирующие системы, спутниковые технологии, беспилотные летательные аппараты и пр.;
- оперативное получение больших объёмов геопространственных данных;
- разработка новых методов математической обработки и автоматизация геодезических вычислений.

В современной геодезии компьютер стал центром обработки всех данных. Развитие вычислительной техники позволило автоматизировать очень большое количество геодезических вычислений от решения прямой и обратной геодезических задач на инженерном калькуляторе через специальные функции до уравнивания различных геодезических построений на персональном компьютере (ПК) с помощью специализированных программ (CREDO, MN и др.).

Однако даже внедрение компьютеров в процесс геодезических вычислений не могло решить всех вопросов, особенно на начальных этапах компьютеризации геодезии (начало 70-х годов XX века). Во-первых, не существовало специализированных программ. К примеру, не было даже разработано программ для решения больших систем линейных уравнений (если в них более 100 неизвестных). Поэтому геодезистам приходилось сначала писать программы, а потом с их помощью решать поставленные задачи, при этом требовалось не только знание языков программирования, но и различных математических методов. Во-вторых, даже при наличии работающей программы, мощности вычислительной техники не хватало для оперативного решения поставленных

задач, например, уравнивание нескольких аэрофотосъёмочных маршрутов занимало от 1-2 часов до одних суток [4].

В настоящее время проблемы, связанные с быстродействием компьютеров, уже не возникают. Благодаря увеличению производительности компьютеров за последние 20 лет в 500 раз (Приложение Б), сеть, которая уравнивалась один час, сейчас уравнивается 7 секунд. Однако остаются актуальными вопросы разработки новых методов обработки геодезических данных и создания на их основе программных алгоритмов.

В современной геодезии огромное количество оптимизационных задач, например, построение локального эллипсоида для конкретной территории, уравнивание геодезических сетей, определение параметров связи систем координат и т.п. Особенно много задач оптимизации в прикладной геодезии: юстировка и выставление в проектное положение элементов радиотелескопа, выправка подкрановых путей, обработка результатов обмерных работ при лазерном сканировании, выверка прямолинейности оси вращения печи обжига и т.п. Современные геодезические приборы и методы измерений обеспечивают получение большого количества избыточной информации, что ведёт к усложнению оптимизационных задач. Классические методы (параметрический и коррелятивный) нецелесообразны и менее эффективны по сравнению с методами нелинейного программирования. Быстродействие современных компьютеров обеспечивает возможность решать задачи оптимизации по-новому.

Цифровые методы и оборудование настолько глубоко вошли в современную геодезию, что теперь всё её развитие неразрывно связано с развитием компьютерной техники и программного обеспечения.

Стоит также отметить, что согласно принятой в нашей стране стратегии импортозамещения, госкорпорации обязаны перейти на российское программное обеспечение (ПО) к 2022 году [76]. Таким образом, в ближайшем будущем геодезические предприятия для выполнения госзаказов, например, для оборонной промышленности, будут обязаны пользоваться отечественными программами для обработки геодезических данных. Следовательно, необходимо разрабатывать

математические алгоритмы, которые послужат базой при создании универсальных программ для эффективного решения широкого круга геодезических оптимизационных задач.

Методы нелинейного программирования (в частности поисковые методы) являются полезными при разработке программных продуктов отечественного производства согласно политики импортозамещения.

2.5 Выводы по Главе 2

До относительно недавнего времени термин «оптимизация» в геодезии не использовался, потому что оптимизационные задачи как таковые не ставились. Существовали задачи уравнивания, но они решались классическими строгими методами, а другие альтернативные методы решения не предлагались. Безусловно, учёные-математики понимали, что задачи оптимизации, в том числе в геодезии, можно решать различными методами, например, перебором (или подбором) решения. Однако никто обстоятельно не занимался подобными итерационными методами, так как для проверки теоретических разработок и практического внедрения просто не было технических возможностей.

Повышение производительности измерительной и вычислительной техники (внедрение электронных тахеометров, лазерных сканеров, спутниковых технологий и пр.) не только послужили толчком для постановки сложных задач оптимизации в геодезии, но и дали возможности решать поставленные задачи по-новому, т.е. с помощью методов нелинейного программирования (в частности поисковыми методами).

В настоящее время в геодезии происходит постепенный переход от классических строгих методов к методам нелинейного программирования. Данный переход обусловлен развитием компьютерной техники. Мгновенная обработка больших объёмов данных, применение методов нелинейного программирования, многократные вычисления целевых функций, поисковые

стратегии, применение теории стохастичности, сама оптимизация и пр. были невозможны без быстродействующих компьютеров.

Поисковые методы были разработаны задолго до того, как появилась возможность их применить. В истории человечества много примеров, когда практическое внедрение теоретических идей шло с огромным отставанием из-за отсутствия технических средств их реализации. Например, в 1560 году испанский картограф, инструментальщик, историк Алонсо де Санта Крус предложил идею использования точных часов для определения долготы места. Но первый хронометр появился только через 200 лет в 1759 году (создал его английский изобретатель, часовщик Джон Гаррисон), кроме того, потребовалось ещё 40 лет для его усовершенствования [82].

Идеи поисковых методов на много десятилетий опередили не только вычислительные возможности компьютерной техники для своей реализации, но и задачи оптимизации, для решения которых они и были разработаны. Это один из ярких примеров, когда сначала разрабатывается метод решения задачи, а позже появляется и сама задача.

На современном этапе методы поисковой оптимизации являются мощным математическим инструментом при решении задач оптимизации различной сложности. В настоящее время появилась не просто возможность, а необходимость применения поисковых методов для автоматизированной обработки геодезических измерений. Наступает «золотой век» методов поисковой оптимизации. Главным априорным фактором их широкого внедрения служит быстродействие и высокая производительность компьютеров.

Помимо этого во второй главе:

- представлены общие положения теории оптимизации, встречающиеся в геодезической практике;
- установлен общий принцип решения задач оптимизации при использовании поисковых методов;
- обоснован выбор целевой функции на основе МНК, как наиболее оптимальной и эффективной применительно к оптимизационным геодезическим задачам;

- рассмотрены основные методы поисковой оптимизации, с выявлением их достоинств и недостатков.

На основе теоретических исследований поисковых методов для дальнейшей работы были выбраны две стратегии в силу их преимуществ: стратегия квадратичной аппроксимации (а именно метод парабол) и генетические алгоритмы случайного поиска (простой генетический алгоритм).

Преимущество метода парабол – малое количество итераций; недостаток – более сложный алгоритм по сравнению с другими поисковыми методами.

Преимущества генетических алгоритмов: простота, надёжность, сходимость; недостаток – большое количество итераций. Однако отметим, что современные компьютеры позволяют выполнять миллионы вычислений за секунды, тем самым обеспечивая необходимое количество приближений, что было обосновано в разделе 2.4. Быстродействие программных алгоритмов определяется не количеством итераций, а временем, которое затрачивается на решение поставленной задачи.

ГЛАВА 3 МЕТОД ПАРАБОЛ

Несмотря на то, что большинство поисковых методов имеют отработанные алгоритмы реализации, а их действенность подтверждена решением тестовых и практических задач, всегда существует потребность в совершенствовании механизма оптимизации, т.е. в улучшении самого процесса решения, оптимизационного метода. Одним из путей подобного улучшения является программная реализация поисковых методов. Фактически, один и то же математический метод можно по-разному запрограммировать, и достоверность получаемых результатов будет зависеть от языка программирования, квалификации и опыта программиста и пр. [54].

Среди многочисленных поисковых методов можно выделить несколько, которые с точки зрения дальнейшего развития (модификаций) являются более перспективными, чем все остальные.

Метод парабол имеет явные преимущества по сравнению с большинством методов поисковой оптимизации [91]. Особенность в том, что его стратегия является ближайшим аналогом метода Ньютона вторых производных, но реализуется без их вычисления. Таким образом, метод парабол обладает достоинствами методов с использованием производных (определение минимума целевой функции за малое количество приближений), но лишён их главного недостатка (необходимость в вычислении производных).

Главной причиной исследования данного метода является его потенциал с точки зрения повышения быстродействия оптимизационного процесса.

3.1 Принцип решения задач оптимизации методами квадратичной аппроксимации

Методы полиномиальной аппроксимации основываются на теореме Вейерштрасса об аппроксимации [75], согласно которой любую непрерывную на некотором отрезке функцию можно аппроксимировать (т.е. заменить) другой

более простой функцией (аппроксимирующей функций, аппроксимирующим полиномом). При этом экстремум аппроксимирующей функции является приближением к экстремуму аппроксимируемой функции на этом отрезке. Данные методы формально относятся к методам одномерной оптимизации, т.е. решают оптимизационные задачи, в которых целевая функция зависит от одного параметра, однако их алгоритмы легко адаптируются для решения многомерных задач.

Существует два варианта повышения сходимости рассматриваемых методов. Первый – уменьшение отрезка аппроксимации, но для этого необходимо знать область определения целевой функции, на котором она достигает своего глобального экстремума. Как правило, поиск такой области осуществляется методами исключения отрезков. Второй – увеличение порядка аппроксимирующего полинома. В этом случае, область значений целевой функции может содержать как глобальный экстремум, так и локальные экстремумы. Чем выше порядок полинома, тем точнее аппроксимация целевой функции. Повышение порядка полинома позволяет проскочить локальные экстремумы, однако ведёт к усложнению вычислений, поэтому на практике используют полиномы не выше третьего порядка [108, 121, 132].

Методы полиномиальной аппроксимации делятся на две группы [108, 165]:

1. Методы квадратичной аппроксимации, в которых используются полиномы второго порядка: метод Пауэлла, метод Девиса-Свена-Кемпи (ДСК), метод квадратичной интерполяции. Для эффективного использования этих методов целевая функция должна быть унимодальной и являться достаточно гладкой или хотя бы непрерывной. Повышение сходимости достигается путём уменьшения отрезка аппроксимации, т.е. необходим подготовительный этап.
2. Методы кубической аппроксимации, в которых используются полиномы третьего порядка. Данные методы являются одними из самых эффективных среди методов одномерной оптимизации, однако в них необходимо вычисление первой производной целевой функции. Следовательно, эти методы не являются прямыми.

Рассмотрим подробнее методы квадратичной аппроксимации. Во-первых, отметим, что в геодезии редко встречаются одномерные оптимизационные задачи. Однако, несмотря на то, что методы квадратичной аппроксимации относятся к методам одномерной оптимизации, они могут применяться при решении задач, в которых целевые функции зависят от нескольких параметров. В этом случае, аппроксимация целевой функции осуществляется последовательно по каждому параметру.

Во-вторых, решение задачи методами Пауэлла, ДСК и квадратичной интерполяции осуществляется в два этапа:

- определение области глобального экстремума (подготовительный этап);
- аппроксимация целевой функции квадратичным полиномом.

Различие рассматриваемых методов заключается только в алгоритме уменьшения отрезка аппроксимации. Для удобства можно объединить методы квадратичной аппроксимации под общим термином «метод парабол», так как в них для аппроксимации целевой функции применяется полином второго порядка (квадратный трёхчлен), график которого (парабола) проходит через три выбранные точки графика целевой функции.

Общий принцип метода парабол рассмотрим на примере решения задачи аппроксимации окружностью. Данная задача часто встречается в геодезической практике, например, при выверке прямолинейности оси вращения печей обжига; определении крена дымовых труб, градирен или других цилиндрических конструкций; обмерах арочных конструкций и т.п. [72, 107, 178]. Целевая функция метода наименьших квадратов для данной задачи имеет вид (7). Требуется найти такие значения параметров X , Y и R , при которых целевая функция примет наименьшее значение. Исходными данными являются плановые координаты x_i и y_i точек, измеренных на окружности (Приложение В).

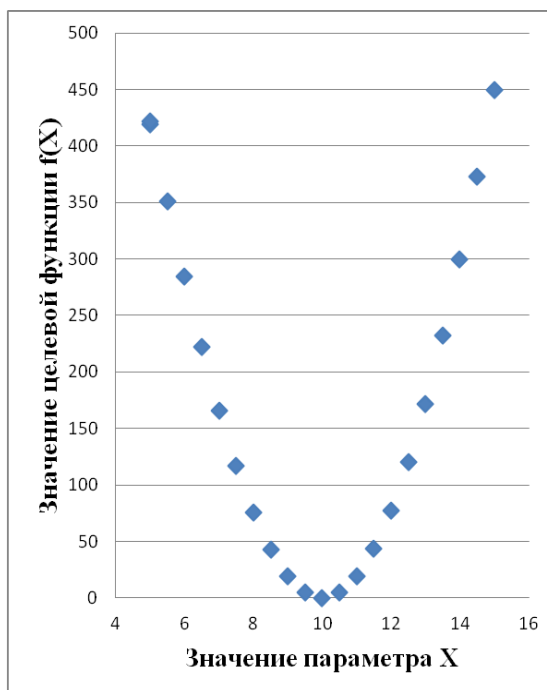
Проверим теорему Вейерштрасса об аппроксимации на данном примере. В рассматриваемой задаче области изменения параметров легко определимы, поэтому опустим этап определения отрезка аппроксимации по каждому параметру. Построим графики зависимостей изменения целевой функции от

изменения каждого параметра на его области определения (специально расширим область определения параметра R для большей наглядности графика), при условии, что другие два параметра остаются неизменными:

- $f(X)$, $X \in [4.985, 15.000]$ (таблица 1, рисунок 8);
- $f(Y)$, $Y \in [5.005, 15.000]$ (таблица 2, рисунок 9);
- $f(R)$, $R \in [0.000, 10.000]$ (таблица 3, рисунок 10).

Таблица 1 – Изменение значения целевой функции $f(X)$ от параметра X

Значение параметра X, м	Значение целевой функции $f(X)$, м
4.985	422.146
5.000	419.950
5.500	351.114
6.000	284.474
6.500	222.150
7.000	165.831
7.500	116.669
8.000	75.478
8.500	42.844
9.000	19.196
9.500	4.844
10.000	0.008
10.500	4.823
11.000	19.342
11.500	43.525
12.000	77.231
12.500	120.199
13.000	172.012
13.500	232.044
14.000	299.353
14.500	372.523
15.000	449.835

Рисунок 8 – График изменения целевой функции $f(X)$ от параметра X Таблица 2 – Изменение значения целевой функции $f(Y)$ от параметра Y

Значение параметра Y , м	Значение целевой функции $f(Y)$, м
5.005	446.534
5.000	447.268
5.500	367.096
6.000	293.101
6.500	226.161
7.000	176.108
7.500	116.512
8.000	74.754
8.500	42.094
9.000	18.699
9.500	4.662
10.000	0.008
10.500	4.690
11.000	18.589
11.500	41.501
12.000	73.127
12.500	113.040
13.000	160.641
13.500	215.066
14.000	275.013
14.500	338.294
14.990	399.124
15.000	400.306

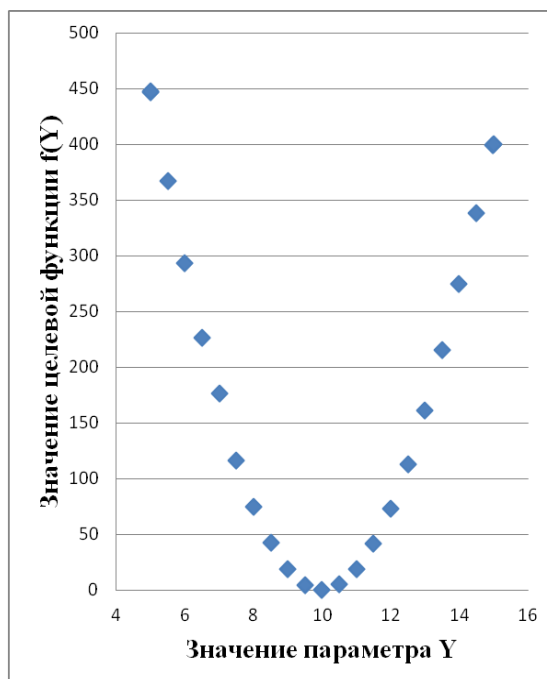


Рисунок 9 – График изменения целевой функции $f(Y)$ от параметра Y

Таблица 3 – Изменение значения целевой функции $f(R)$ от параметра R

Значение параметра R , м	Значение целевой функции $f(R)$, м
0.000	950.148
0.500	769.634
1.000	608.120
1.500	465.606
2.000	342.092
2.500	237.578
3.000	152.064
3.500	85.550
4.000	38.036
4.500	9.522
5.000	0.008
5.500	9.494
6.000	37.979
6.500	85.465
7.000	151.951
7.500	237.437
8.000	341.923
8.500	465.409
9.000	607.895
9.500	769.381
10.000	949.867

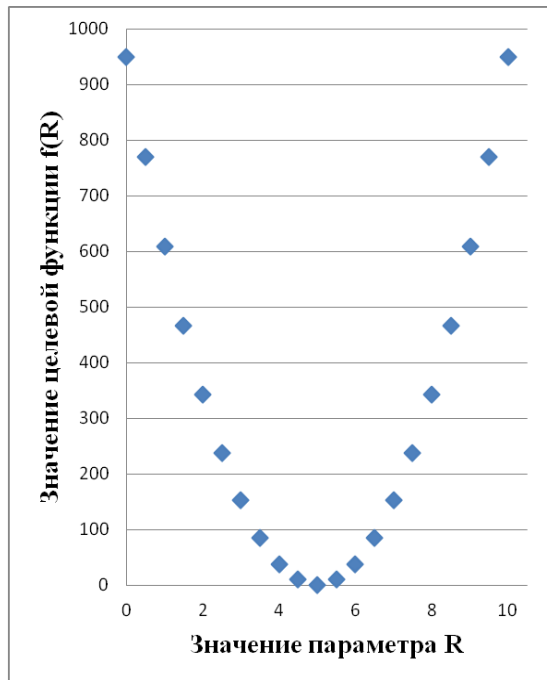


Рисунок 10 – График изменения целевой функции $f(R)$ от параметра R

На рисунках 8-10 видно, что графики, отражающие зависимости изменения целевой функции от изменения параметров, близки к параболам. Следовательно, для решения данной задачи целевую функцию достаточно аппроксимировать полиномом второго порядка.

Зададим начальное значение параметра X_0 и шаг k изменения этого параметра. Аргументы Y и R пока остаются неизменными. Вычислим три значения целевой функции $f_{-1} = f(X_{-1}, Y, R)$, $f_0 = f(X_0, Y, R)$, $f_{+1} = f(X_{+1}, Y, R)$ в соседних точках для аргументов $X_{-1} = X_0 - k$, X_0 и $X_{+1} = X_0 + k$. Построим аппроксимирующую параболу по трём точкам (рисунок 11).

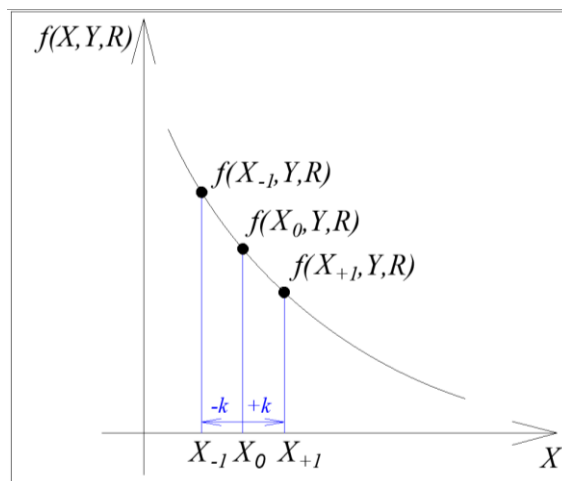


Рисунок 11 – Фрагмент аппроксимирующей параболы для параметра X

Составим систему из трёх уравнений (8):

$$\begin{cases} a \cdot X_{-1}^2 + b \cdot X_{-1} + c = f_{-1}; \\ a \cdot X_0^2 + b \cdot X_0 + c = f_0; \\ a \cdot X_{+1}^2 + b \cdot X_{+1} + c = f_{+1}. \end{cases} \quad (8)$$

Минимум параболы определим через производную (9), приравняв её к нулю:

$$f'(X) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta X} = 2 \cdot a \cdot X_{onm.} + b = 0, \quad (9)$$

где $X_{onm.}$ – значение параметра X , при котором функция $f(X)$ принимает минимальное значение на текущей итерации, т.е. $X_{onm.}$ является первым приближением к истинному значению параметра; $a = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ и $b = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ – неизвестные, которые вычисляются через определители Δ , Δ_1 и Δ_2 системы уравнений (8) по методу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{-1}^2 & X_{-1} & 1 \\ X_0^2 & X_0 & 1 \\ X_{+1}^2 & X_{+1} & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} f_{-1} & X_{-1} & 1 \\ f_0 & X_0 & 1 \\ f_{+1} & X_{+1} & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} X_{-1}^2 & f_{-1} & 1 \\ X_0^2 & f_0 & 1 \\ X_{+1}^2 & f_{+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Из равенства (9) следует (10):

$$X_{onm.} = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{\Delta_2 \cdot \Delta}{2 \cdot \Delta \cdot \Delta_1} = -\frac{\Delta_2}{2 \cdot \Delta_1}. \quad (10)$$

Введём величина h («глобальный» шаг) и запишем равенство (11):

$$X_0 + h = X_{onm.}, \quad (11)$$

где h – «глобальный» шаг для параметра X (12):

$$h = -\frac{X_{-1}^2 \cdot f_0 + X_{+1}^2 \cdot f_{-1} + X_0^2 \cdot f_{+1} - X_{+1}^2 \cdot f_0 - X_{-1}^2 \cdot f_{+1} - X_0^2 \cdot f_{-1}}{2 \cdot (X_0 \cdot f_{-1} + X_{-1} \cdot f_{+1} + X_{+1} \cdot f_0 - X_0 \cdot f_{+1} - X_{-1} \cdot f_{-1} - X_{+1} \cdot f_0)} - X_0. \quad (12)$$

Преобразуем отдельно числитель и знаменатель:

$$\begin{aligned}
& X_{-1}^2 \cdot f_0 + X_{+1}^2 \cdot f_{-1} + X_0^2 \cdot f_{+1} - X_{+1}^2 \cdot f_0 - X_{-1}^2 \cdot f_{+1} - X_0^2 \cdot f_{-1} = \\
& = f_0 \cdot (X_{-1}^2 - X_{+1}^2) + f_{-1} \cdot (X_{+1}^2 - X_0^2) + f_{+1} \cdot (X_0^2 - X_{-1}^2) = \\
& = f_0 \cdot [(X_0 - k)^2 - (X_0 + k)^2] + f_{-1} \cdot [(X_0 + k)^2 - X_0^2] + f_{+1} \cdot [X_0^2 - (X_0 - k)^2] = \\
& = f_0 \cdot (X_0^2 - 2 \cdot X_0 \cdot k + k^2 - X_0^2 - 2 \cdot X_0 \cdot k - k^2) + f_{-1} \cdot (X_0^2 + 2 \cdot X_0 \cdot k + k^2 - X_0^2) + \\
& + f_{+1} \cdot (X_0^2 - X_0^2 + 2 \cdot X_0 \cdot k - k^2) = \\
& = -4 \cdot f_0 \cdot X_0 \cdot k + 2 \cdot f_{-1} \cdot X_0 \cdot k + f_{-1} \cdot k^2 + 2 \cdot f_{+1} \cdot X_0 \cdot k - f_{+1} \cdot k^2, \\
& 2 \cdot (X_0 \cdot f_{-1} + X_{-1} \cdot f_{+1} + X_{+1} \cdot f_0 - X_0 \cdot f_{+1} - X_{+1} \cdot f_{-1} - X_{-1} \cdot f_0) = \\
& = 2 \cdot [f_{-1} \cdot (X_0 - X_{+1}) + f_0 \cdot (X_{+1} - X_{-1}) + f_{+1} \cdot (X_{-1} - X_0)] = \\
& = 2 \cdot [f_{-1} \cdot (X_0 - X_0 - k) + f_0 \cdot (X_0 + k - X_0 + k) + f_{+1} \cdot (X_0 - k - X_0)] = \\
& = 2 \cdot (-f_{-1} \cdot k + 2 \cdot f_0 \cdot k - f_{+1} \cdot k) = -2 \cdot k \cdot (f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1}).
\end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{-4 \cdot f_0 \cdot X_0 \cdot k + 2 \cdot f_{-1} \cdot X_0 \cdot k + f_{-1} \cdot k^2 + 2 \cdot f_{+1} \cdot X_0 \cdot k - f_{+1} \cdot k^2}{-2 \cdot k \cdot (f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1})} - X_0 = \\
&= \frac{-4 \cdot f_0 \cdot X_0 + 2 \cdot f_{-1} \cdot X_0 + f_{-1} \cdot k + 2 \cdot f_{+1} \cdot X_0 - f_{+1} \cdot k}{2 \cdot (f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1})} - X_0 = \\
&= \frac{2 \cdot X_0 \cdot (f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1}) + k \cdot (f_{-1} - f_{+1}) - 2 \cdot X_0 \cdot (f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1})}{2 \cdot (f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1})} = \\
&= \frac{k \cdot (f_{-1} - f_{+1})}{2 \cdot (f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1})}.
\end{aligned}$$

После преобразования формула (12) примет вид (13), а равенство (11) – вид (14):

$$h = \frac{k \cdot (f_{-1} - f_{+1})}{2 \cdot (f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1})}, \quad (13)$$

$$X_0 + \frac{k \cdot (f_{-1} - f_{+1})}{2 \cdot (f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1})} = X_{opt}. \quad (14)$$

На рисунке 12 представлена схема аппроксимации целевой функции с помощью «глобального» шага по одному параметру.

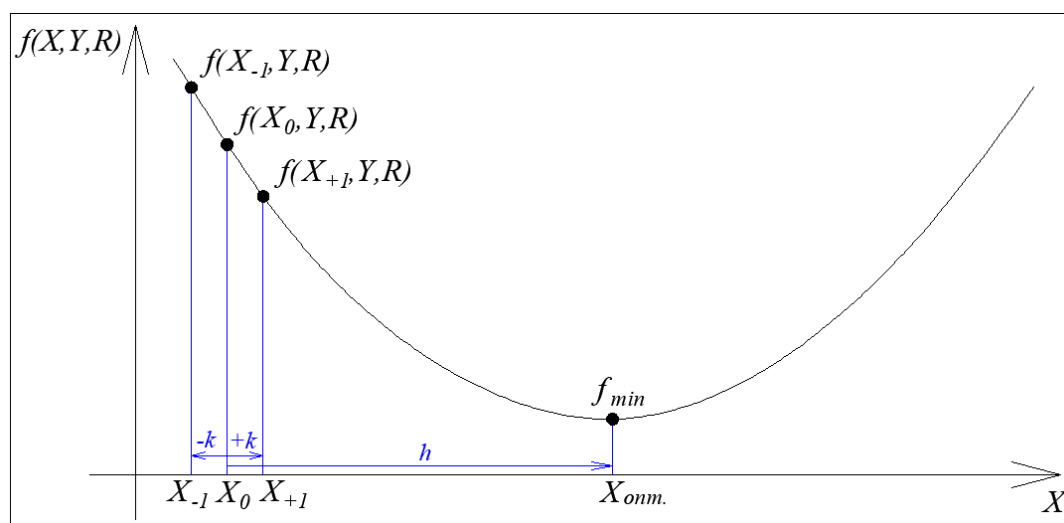


Рисунок 12 – Упрощённая схема аппроксимации целевой функции по параметру X методом парабол

Затем последовательно выполняется аппроксимация целевой функции по параметру Y (при неизменных параметрах X_{opt} и R) и по параметру R (при неизменных параметрах X_{opt} и Y_{opt}). Таким образом, первое приближение целевой функции к минимальному значению осуществляется путём последовательного уточнения каждого параметра. На каждом следующем приближении величину шага k необходимо уменьшать во избежание закливания около точки минимума. Приближения выполняются до тех пор, пока не будут достигнуты заданные точности ε (произвольно малое положительное число) для целевой функции и (или) параметров:

$$\begin{aligned}
 |f_{i+1} - f_i| &\leq \varepsilon_1; \\
 \left| X_{\text{onm. } i+1} - X_{\text{onm. } i} \right| &\leq \varepsilon_2; \\
 \left| Y_{\text{onm. } i+1} - Y_{\text{onm. } i} \right| &\leq \varepsilon_2; \\
 \left| R_{\text{onm. } i+1} - R_{\text{onm. } i} \right| &\leq \varepsilon_2.
 \end{aligned}$$

После выполнения заданных условий поисковый процесс останавливается, конечное значение целевой функции f_{i+1} принимается как минимальное f_{\min} , а значения параметров на последней итерации $X_{\text{onm. } i+1}$, $Y_{\text{onm. } i+1}$, $R_{\text{onm. } i+1}$ – как конечные и оптимальные.

В данном разделе описан общий принцип решения оптимизационных задач методом парабол. Главным достоинством этого метода является значительное приближение к области минимума целевой функции за один «глобальный» шаг. Недостаток – необходимость этапа подготовки для выявления области определения параметров.

3.2 Точность вычислений методом парабол

В разделе 3.1 приведена формула «глобального» шага (13). Каждая из функций f_{-1} , f_0 и f_{+1} вычисляется с определённой погрешностью, вызванной одиночной точностью вычислений, т.е. разрядной сеткой неизвестного. Эти погрешности переносятся в погрешность вычисления глобального шага Δh .

Одиночная (одинарная) точность (*single*) – широко распространённый вычислительный формат представления вещественных чисел с плавающей точкой (*floating point*), занимающий память в 4 байта. Такие числа обычно обеспечивают точность 7 десятичных цифр [160, 184].

Для определения выгоднейших условий работы метода парабол оценим погрешность вычислений. Для простоты дальнейших выводов введём обозначение $B = f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1}$, следовательно, формула (13) примет вид (15):

$$h = \frac{k \cdot (f_{-1} - f_{+1})}{2 \cdot B}. \quad (15)$$

Продифференцируем формулу (15) и исследуем её. Частные производные «глобального» шага по трём вычисляемым функциям (16-18):

$$\frac{\partial h}{\partial f_{-1}} = \frac{k}{2} \cdot \frac{f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1} - f_{-1} + f_{+1}}{B^2} = k \cdot \frac{f_{+1} - f_0}{B^2}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial h}{\partial f_0} = k \cdot \frac{f_{-1} - f_{+1}}{B^2}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial h}{\partial f_{+1}} = \frac{k}{2} \cdot \frac{-f_{-1} + 2 \cdot f_0 - f_{+1} - f_{-1} + f_{+1}}{B^2} = k \cdot \frac{f_0 - f_{-1}}{B^2}. \quad (18)$$

Принимая, что погрешности вычисления функций примерно одинаковы, т.е. $\Delta f_{-1} \approx \Delta f_0 \approx \Delta f_{+1} = \Delta f$, и суммируя модули погрешностей, получим предельную погрешность вычисления «глобального» шага (19):

$$\Delta h = \Delta f \cdot k \cdot \frac{|f_{+1} - f_0| + |f_{-1} - f_{+1}| + |f_0 - f_{-1}|}{B^2} = \Delta f \cdot k \cdot \frac{|f_{+1} - f_0| + |f_{-1} - f_{+1}| + |f_0 - f_{-1}|}{(f_{-1} - 2 \cdot f_0 + f_{+1})^2}. \quad (19)$$

Исследования на примере аппроксимации окружностью показали следующее:

- 1) при значительном удалении целевой функции от минимального значения (в начале итерационного процесса) точность Δh вычисления «глобального» шага резко падает при уменьшении шага изменения параметра k (таблица 4);
- 2) на стадии итерационного процесса, когда целевая функция приближается к минимуму, точность Δh вычисления «глобального» шага примерно постоянна, но приблизиться к минимальному значению целевой функции получается при относительно малых значениях шага k (таблица 5).

Таблица 4 – Результаты исследования точности Δh вычисления «глобального» шага при искомым параметрах, далёких от истинных значений

Значения параметров $X = 9 \text{ м}$, $Y = 9 \text{ м}$, $R = 4 \text{ м}$					
f_{-1}	f_0	f_{+1}	k , м	h , м	Δh , Мкм(мм)
79.6530	50.8374	39.7441	1.000	1.126	1.3 Мкм
62.9951	50.8374	43.0942	0.500	1.127	5.2 Мкм
55.1682	50.8374	47.2122	0.200	1.127	33 Мкм

Продолжение таблицы 4

52.9145	50.8374	48.9368	0.100	1.127	130 Мкм
51.8539	50.8374	49.8651	0.050	1.125	517 Мкм
51.2387	50.8374	50.4432	0.020	1.120	3.2 мм
51.0372	50.8374	50.6394	0.010	1,105	12 мм
50.9371	50.8374	50.7382	0.005	0,995	40 мм
50.87725	50.8374	50.7977	0.002	0,530	72 мм
50.85734	50.83744	50.81756	0.001	0,198	1 м

Из данных в последней строке (таблица 4) очевидно, что нельзя уверенно вычислить ни сам шаг, ни его погрешность, так как погрешность превышает саму величину шага.

Таблица 5 – Результаты исследования точности Δh вычисления «глобального» шага при искомым параметрах, близких к истинному значению

$X = 10 \text{ м}, Y = 10 \text{ м}, R = 5 \text{ м}$					
f_{-1}	f_0	f_{+1}	$k, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$\Delta h, \text{ Мкм}$
6.824424	0.004992341	6.258825	1.000	0.0216	0.05 Мкм
1.766368	0.004992341	1.611781	0.500	0.0115	0.025 Мкм
0.3012151	0.004992341	0.2517464	0.200	0.0091	0.010 Мкм
0.08487832	0.004992341	0.06099256	0.100	0.0088	0.005 Мкм
0.02790127	0.004992341	0.01606380	0.050	0.0087	0.003 Мкм
0.01007257	0.004992341	0.005349369	0.020	0.0087	0.003 Мкм
0.006852385	0.004992341	0.004491626	0.010	0.0087	0.013 Мкм
0.005752395	0.004992341	0.004572120	0.005	0.0087	0.050
0.005255577	0.004992341	0.004783479	0.002	0.0087	0.319
0.005117162	0.004992341	0.004881114	0.001	0.0087	1.3

На основе исследований, приведённых в данном разделе, можно сделать следующий вывод: в начале итерационного процесса, когда значения определяемых параметров далеки от истинных, шаг изменения этим параметров должен быть большим. Как правило, по методу парабол достаточно одного приближения для попадания в область минимума целевой функции. Следовательно, на каждой последующей итерации шаг k необходимо уменьшать, чтобы не произошло закливания в области минимума.

3.3 Сравнение метода парабол с методом Ньютона вторых производных

Метод Ньютона вторых производных (второго порядка) относится к методам безусловной оптимизации функций многих переменных [165]. Данный метод основан на квадратичной аппроксимации целевой функции $f(x)$, получаемой путём отбрасывания в ряде Тейлора членов третьего и более высокого порядков (20):

$$f(x) \approx f(x_i) + \nabla^T f(x_i) \cdot (x - x_i) + \frac{1}{2} \cdot (x - x_i)^T \cdot \nabla^2 f(x_i) \cdot (x - x_i), \quad (20)$$

где $\nabla^2 f(x_i)$ – квадратичная матрица вторых частных производных целевой функции $f(x)$, взятых в точке x_i (матрица Гессе) (21):

$$\nabla^2 f(x_i) = H(x_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & & \\ \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В методе Ньютона для определения направления и величины шага оптимизации в уравнении (20) компонент $x - x_i$ заменяется вектором перехода Δx_i из точки x_i в точку x_{i+1} ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$). Таким образом, уравнение (20) принимает вид (22):

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \nabla^T f(x_i) \cdot \Delta x_i + \frac{1}{2} \cdot \Delta x_i^T \cdot \nabla^2 f(x_i) \cdot \Delta x_i. \quad (22)$$

Минимум целевой функции $f(x)$ в направлении вектора перехода Δx_i определяется путём приравнивания к нулю частных производных $f(x)$ по каждой из компонент Δx . Вектор перехода определяется по формуле (23):

$$\Delta x_i = -[\nabla^2 f(x_i)]^{-1} \cdot \nabla f(x_i), \quad (23)$$

где $[\nabla^2 f(x_i)]^{-1}$ – матрица, обратная матрице Гессе $H(x_i)$.

Таким образом, переход из точки x_i в точку x_{i+1} по методу Ньютона производится по формуле (24):

$$x_{i+1} = x_i - [\nabla^2 f(x_i)]^{-1} \cdot \nabla f(x_i). \quad (24)$$

Если целевая функция $f(x)$ является квадратичной, то для достижения её минимума по формуле (24) достаточно одного шага приближения, однако при общей нелинейности достичь минимума целевой функции за одно приближение не получится [165].

Метод парабол по своей сути близок к методу Ньютона второго порядка. Рассмотрим родство этих методов на примере одномерной оптимизации. В этом случае по методу Ньютона (24) очередное значение параметра функции определяется по формуле (25):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}, \quad (25)$$

где $f'(x_i)$ – первая производная целевой функции в точке x_i ; $f''(x_i)$ – вторая производная целевой функции в точке x_i .

Для определения численных значений первых и вторых частных производных воспользуемся разностными схемами [51, 61]. Один из простых приёмов – это замена производных соответствующими разностными отношениями (схемами) (26-27):

$$f'(x) = \frac{f(x+k) - f(x-k)}{2 \cdot k}; \quad (26)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+k) - 2 \cdot f(x) + f(x-k)}{k^2}, \quad (27)$$

Используя данные разностные схемы и проведя аналогию с формулой (13), получим (28):

$$\frac{f'(x)}{f''(x)} = \frac{f_{+1} - f_{-1}}{2 \cdot k} \cdot \frac{k^2}{f_{+1} - 2 \cdot f_0 + f_{-1}} = \frac{k \cdot (f_{+1} - f_{-1})}{2 \cdot (f_{+1} - 2 \cdot f_0 + f_{-1})}. \quad (28)$$

Следовательно, численное значение отношения $\frac{f'(x)}{f''(x)}$ в методе Ньютона второго порядка является аналогией «глобального» шага h в методе парабол.

В обоих методах направление и величина шага оптимизации определяются путём квадратичной аппроксимации целевой функции, однако в методе Ньютона

второго порядка используются численные значения первых и вторых производных целевой функции, а в методе парабол достаточно знать только численные значения функции в заданных точках. Также отметим, что недостатком метода Ньютона второго порядка при многомерной оптимизации является необходимость вычисления и обращения матрицы Гессе на каждой итерации. Следовательно, для метода Ньютона необходимо, чтобы целевая функция являлась дважды дифференцируемой, а матрица, обратная матрице Гессе, должна быть положительно определённой.

3.4 Решение тестовых оптимизационных геодезических задач методом парабол

На основе теоретических и практических исследований, представленных в разделах 3.1 и 3.2, был разработан программный алгоритм, реализующий метод парабол в общем виде.

В данном разделе приведены результаты решения тестовых оптимизационных задач (аппроксимация результатов обмеров окружностью, комбинированная засечка и многократная линейная засечка) методом парабол. Решение тестовых задач выполнено с целью проверки работоспособности рассматриваемого оптимизационного метода и определения путей повышения его эффективности. Исходные данные приняты, как не содержащие грубых ошибок, но смоделированы с искажениями измерений по нормальному закону распределения.

3.4.1 Аппроксимация результатов обмеров окружностью

Исходные данные – плановые координаты точек, измеренных на окружности (Приложение Г). Целевая функция метода наименьших квадратов для задачи аппроксимации окружностью имеет вид (7). Необходимо найти такие

значения параметров X , Y и R , при которых целевая функция примет минимальное значение.

В таблице 6 приведены результаты решения данной задачи методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров (Приложение Д), а также их сравнение с результатами расчётов в программе Mathcad (Приложение Е). На рисунке 13 представлены схемы этих вариантов: рисунок 13а – начальные значения параметров заданы далёкими от истинных; рисунок 13б – ближе к истинным; рисунок 13в – очень близко к истинным.

Таблица 6 – Результаты решения задачи аппроксимации результатов обмеров окружностью методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров

Расчёты методом парабол						
Начальные значения параметров	Начальное значение целевой функции f_0	Значения параметров после первой итерации	Значение целевой функции после первой итерации	Количество итераций	Конечные значения параметров	Минимальное значение целевой функции f_{\min}
$X = 15.000 \text{ м}$ $Y = 15.000 \text{ м}$ $R = 2.000 \text{ м}$	1571	$X = 10.802 \text{ м}$ $Y = 11.896 \text{ м}$ $R = 2.178 \text{ м}$	36.14	31	$X = 10.032 \text{ м}$ $Y = 10.089 \text{ м}$ $R = 1.079 \text{ м}$	0.07003
$X = 9.000 \text{ м}$ $Y = 9.000 \text{ м}$ $R = 1.500 \text{ м}$	31.59	$X = 9.409 \text{ м}$ $Y = 9.985 \text{ м}$ $R = 1.179 \text{ м}$	27.52	23	$X = 10.032 \text{ м}$ $Y = 10.089 \text{ м}$ $R = 1.079 \text{ м}$	0.05699
$X = 10.000 \text{ м}$ $Y = 10.000 \text{ м}$ $R = 1.000 \text{ м}$	0.6187	$X = 10.031 \text{ м}$ $Y = 10.080 \text{ м}$ $R = 1.078 \text{ м}$	0.2269	4	$X = 10.032 \text{ м}$ $Y = 10.089 \text{ м}$ $R = 1.079 \text{ м}$	0.03432
Расчёты в программе Mathcad с помощью функции Minimize						
$X = 15.000 \text{ м}$ $Y = 15.000 \text{ м}$ $R = 2.000 \text{ м}$					$X = 10.032 \text{ м}$ $Y = 10.089 \text{ м}$ $R = 1.079 \text{ м}$	
$X = 9.000 \text{ м}$ $Y = 9.000 \text{ м}$ $R = 1.500 \text{ м}$					$X = 10.032 \text{ м}$ $Y = 10.089 \text{ м}$ $R = 1.079 \text{ м}$	
$X = 10.000 \text{ м}$ $Y = 10.000 \text{ м}$ $R = 1.000 \text{ м}$					$X = 10.032 \text{ м}$ $Y = 10.089 \text{ м}$ $R = 1.079 \text{ м}$	

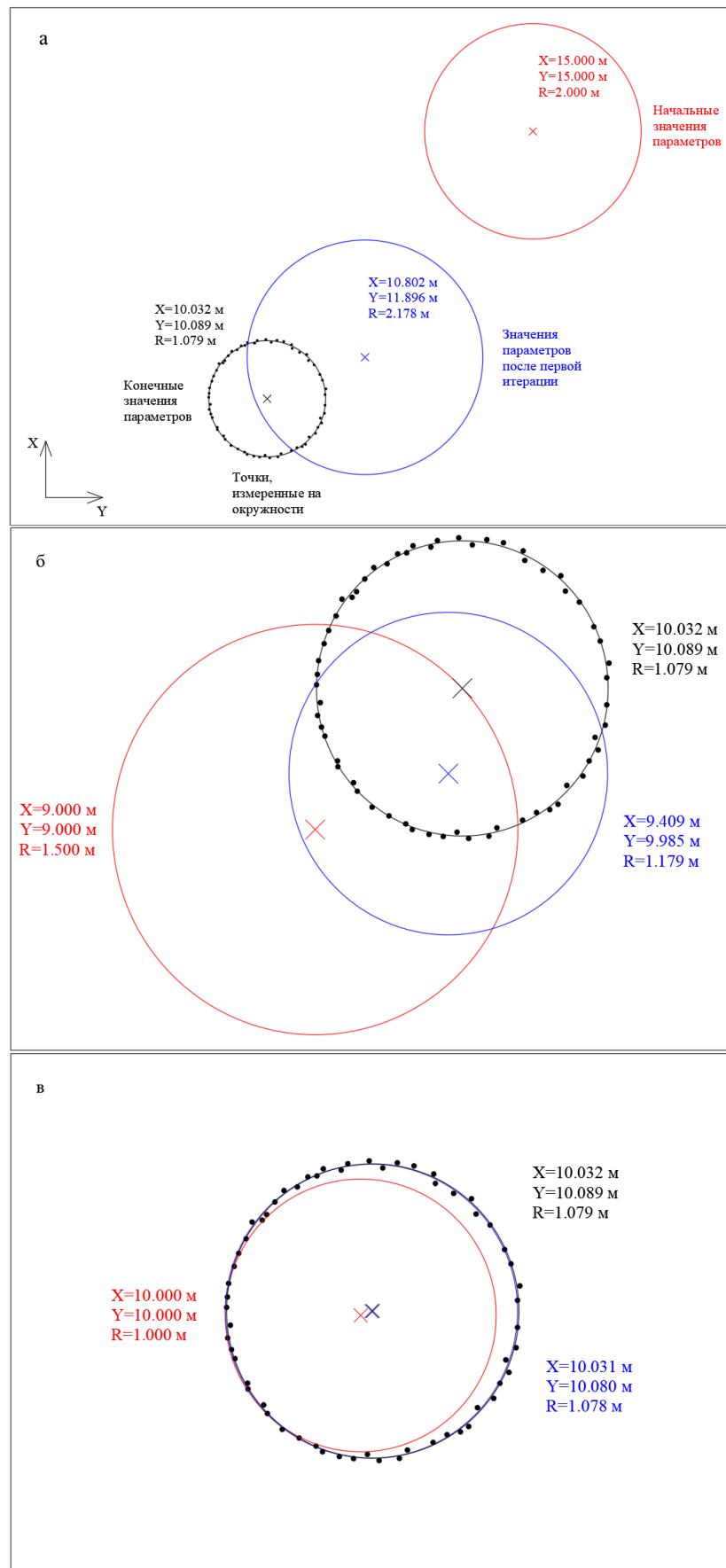


Рисунок 13 – Схемы решения задачи аппроксимации результатов обмеров окружностью методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров

3.4.2 Комбинированная засечка

Схема комбинированной засечки представлена на рисунке 14, исходные данные – в таблице 7 [138]. Требуется определить координаты точки P по двум измеренным углам: угол β_1 – по программе прямой угловой засечки и угол β_2 – по программе обратной угловой засечки; координатам трёх исходных пунктов A , B и C .

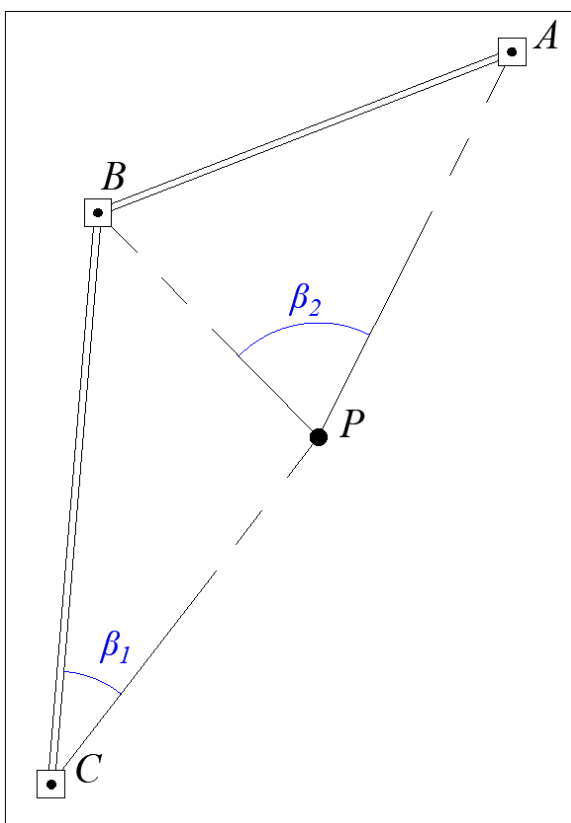


Рисунок 14 – Схема комбинированной засечки

Таблица 7 – Исходные данные для решения комбинированной засечки

Название пункта	x_i , м	y_i , м
A	143 848.77	158 887.01
B	142 390.08	155 144.34
C	137 205.94	154 723.49
Измеренные углы	$\beta_1 = 32^{\circ}51'24''$	$\beta_2 = 70^{\circ}59'53''$

Целевая функция метода наименьших квадратов для комбинированной засечки имеет вид (29):

$$f(X, Y) = [\alpha_{CP} - \alpha_{CB} - \beta_1]^2 + [\alpha_{PA} - \alpha_{PB} - \beta_2]^2 = \min, \quad (29)$$

где X и Y – координаты точки P ; α_{CP} , α_{CB} , α_{PA} и α_{PB} – дирекционные углы сторон CP , CB , PA и PB соответственно; β_1 и β_2 – измеренные углы.

Необходимо найти такие координаты точки P , при которых значение целевой функции будет минимальным.

В таблице 8 приведены результаты решения данной задачи методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров (Приложение Ж), а также их сравнение с результатами расчётов в программе Mathcad (Приложение И). На рисунке 15 представлены схемы этих вариантов: рисунок 15а – начальные значения параметров заданы далёкими от истинных; рисунок 15б – ближе к истинным; рисунок 15в – очень близко к истинным.

Таблица 8 – Результаты решения комбинированной засечки методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров

Расчёты методом парабол						
Начальные значения параметров	Начальное значение целевой функции f_0	Значения параметров после первой итерации	Значение целевой функции после первой итерации	Количество итераций	Конечные значения параметров	Минимальное значение целевой функции f_{\min}
$X = 139\ 000.00\ м$ $Y = 156\ 000.00\ м$	7463974	$X = 139\ 473.33\ м$ $Y = 157\ 042.74\ м$	3119737	49	$X = 140\ 354.63\ м$ $Y = 157\ 139.37\ м$	0.7845
$X = 140\ 000.00\ м$ $Y = 157\ 000.00\ м$	19936	$X = 140\ 217.50\ м$ $Y = 157\ 097.18\ м$	7427	38	$X = 140\ 354.63\ м$ $Y = 157\ 139.37\ м$	0.5933
$X = 140\ 350.00\ м$ $Y = 157\ 135.00\ м$	0.4162	$X = 140\ 354.54\ м$ $Y = 157\ 139.29\ м$	0.2963	22	$X = 140\ 354.63\ м$ $Y = 157\ 139.37\ м$	0.2852
Расчёты в программе Mathcad с помощью функции Minimize						
$X = 139\ 000.000\ м$ $Y = 156\ 000.000\ м$					$X = 140\ 354.63\ м$ $Y = 157\ 139.37\ м$	
$X = 140\ 000.000\ м$ $Y = 157\ 000.000\ м$					$X = 140\ 354.63\ м$ $Y = 157\ 139.37\ м$	
$X = 140\ 350.000\ м$ $Y = 157\ 135.000\ м$					$X = 140\ 354.63\ м$ $Y = 157\ 139.37\ м$	
Расчёты аналитическим методом						
					$X = 140\ 354.63\ м$ $Y = 157\ 139.37\ м$	

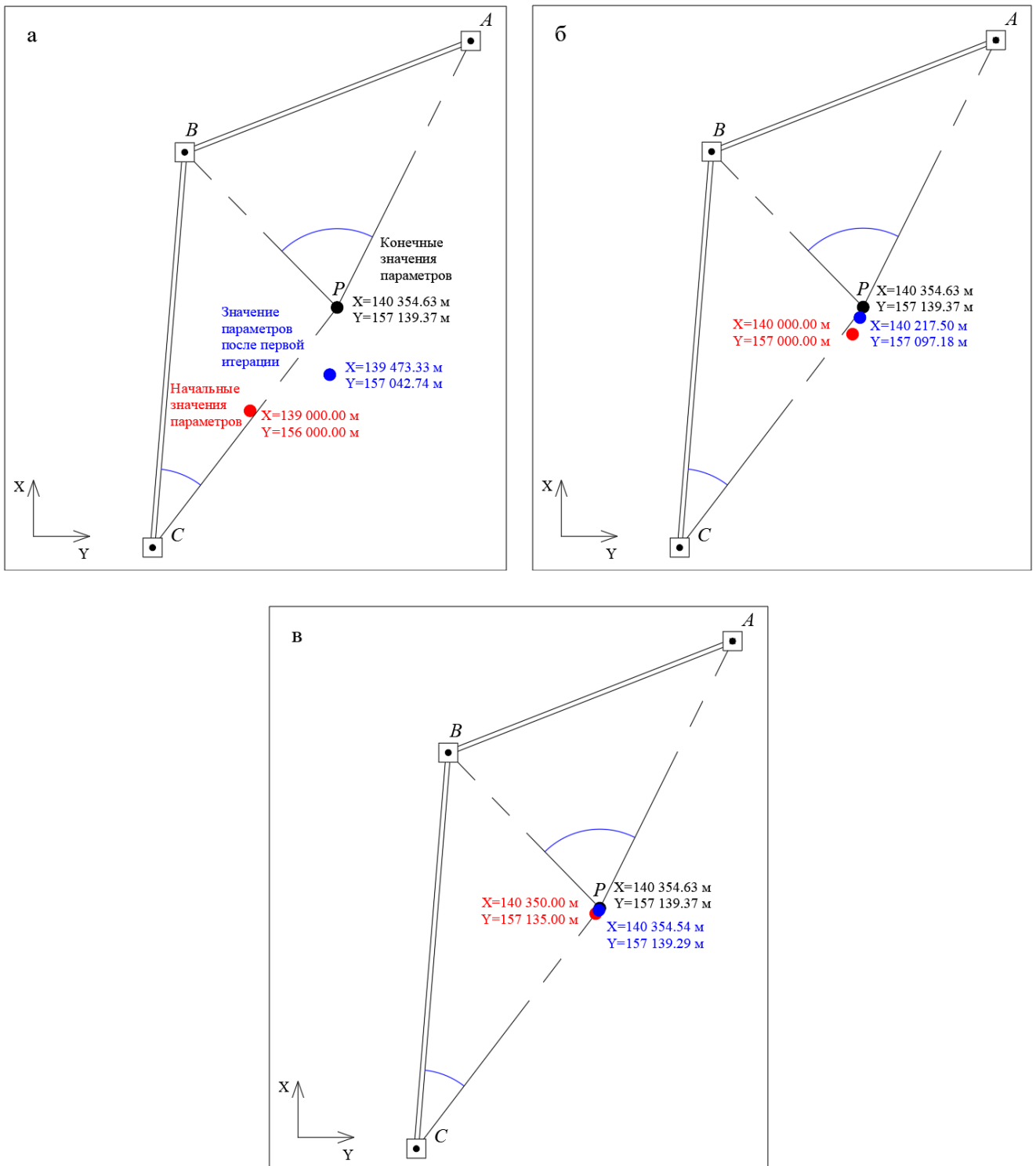


Рисунок 15 – Схемы решения комбинированной засечки методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров

3.4.3 Многократная линейная засечка

Схема многократной линейной засечки представлена на рисунке 16, исходные данные – в таблице 9. Требуется определить координаты точки P по

координатам четырёх исходных пунктов и четырём измеренным расстояниям между исходными и определяемым пунктом.

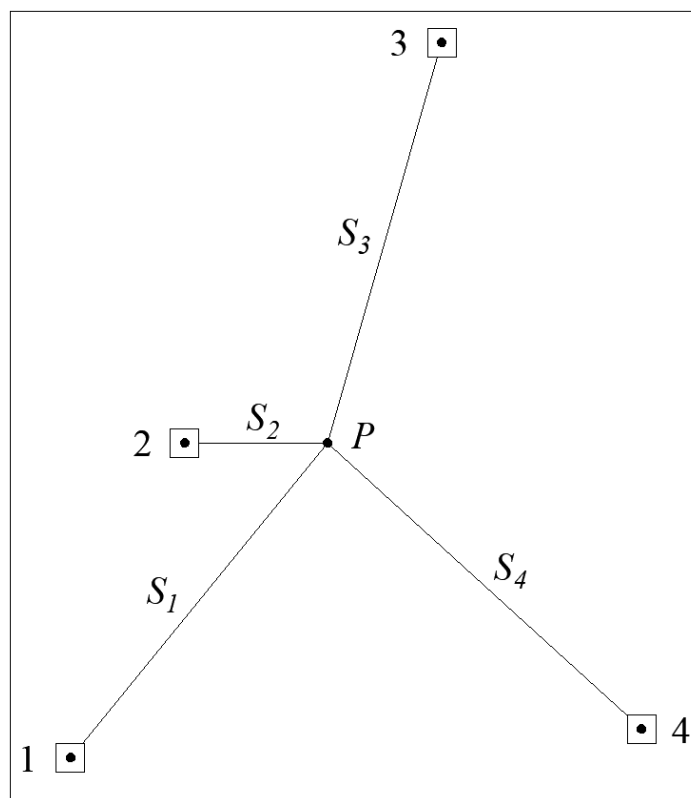


Рисунок 16 – Схема многократной линейной засечки

Таблица 9 – Исходные данные для решения многократной линейной засечки

Название пункта	Координаты исходных пунктов		Измеренные расстояния S_i , м
	x_i , м	y_i , м	
1	1 000.000	1 200.000	1 421.797
2	2 100.000	1 600.000	500.694
3	3 500.000	2 500.000	1456.264
4	1 100.000	3 200.000	1 486.902

Целевая функция метода наименьших квадратов для многократной линейной засечки имеет вид (30):

$$f(X, Y) = \sum_{i=1}^n \left[\sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2} - S_i \right]^2 = \min, \quad (30)$$

где X и Y – координаты точки P ; x_i и y_i – координаты исходных пунктов; S_i – измеренные расстояния между исходными и определяемым пунктами.

Необходимо найти такие координаты точки P , при которых значение целевой функции будет минимальным.

В таблице 10 приведены результаты решения данной задачи методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров (Приложение К), а также их сравнение с результатами расчётов в программе Mathcad (Приложение Л). На рисунке 17 представлены схемы этих вариантов: рисунок 17а – начальные значения параметров заданы далёкими от истинных; рисунок 17б – ближе к истинным; рисунок 17в – очень близко к истинным.

Таблица 10 – Результаты решения многократной линейной засечки методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров

Расчёты методом парабол						
Начальные значения параметров	Начальное значение целевой функции f_0	Значения параметров после первой итерации	Значение целевой функции после первой итерации	Количество итераций	Конечные значения параметров	Минимальное значение целевой функции f_{\min}
$X = 0.000 \text{ м}$ $Y = 0.000 \text{ м}$	16288238	$X = 1\ 636.909 \text{ м}$ $Y = 1157.597 \text{ м}$	6808040	52	$X = 2\ 100.145 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.350 \text{ м}$	0.8967
$X = 2\ 000.000 \text{ м}$ $Y = 2\ 000.000 \text{ м}$	43506	$X = 2\ 117.489 \text{ м}$ $Y = 2\ 097.180 \text{ м}$	16208	47	$X = 2\ 100.145 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.350 \text{ м}$	0.6247
$X = 2\ 100.000 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.000 \text{ м}$	0.9082	$X = 2\ 100.190 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.344 \text{ м}$	0.6467	16	$X = 2\ 100.145 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.350 \text{ м}$	0.6223
Расчёты в программе Mathcad с помощью функции Minimize						
$X = 0.000 \text{ м}$ $Y = 0.000 \text{ м}$					$X = 2\ 100.176 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.318 \text{ м}$	
$X = 2\ 000.000 \text{ м}$ $Y = 2\ 000.000 \text{ м}$					$X = 2\ 100.145 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.350 \text{ м}$	
$X = 2\ 100.00 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.000 \text{ м}$					$X = 2\ 100.145 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.350 \text{ м}$	

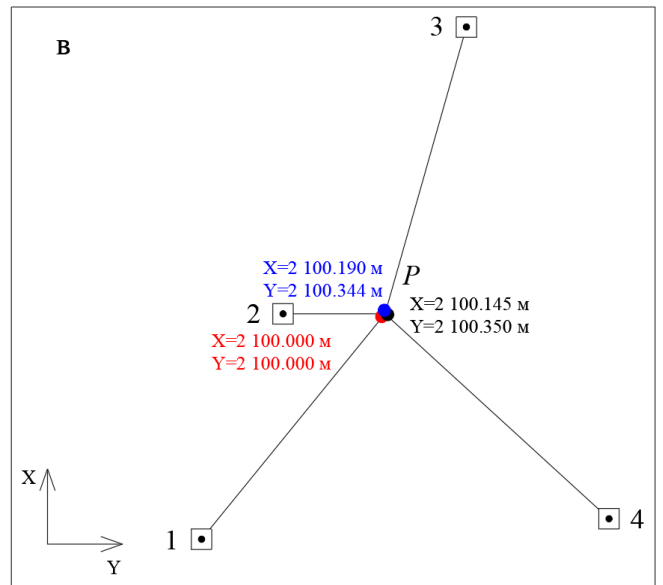
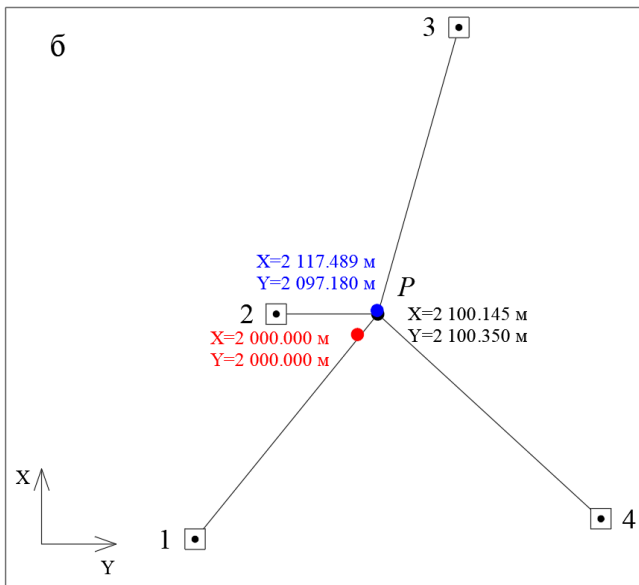
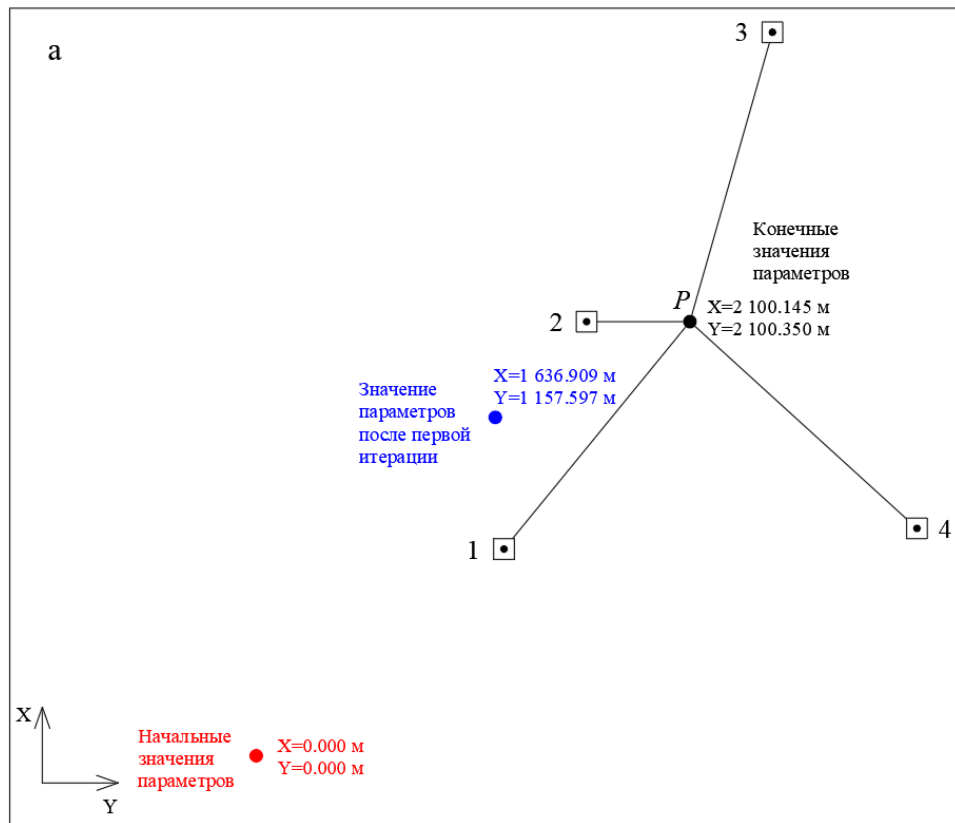


Рисунок 17 – Схемы решения многократной линейной засечки методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров

Из представленных расчётов видно (таблицы 8-10), что если начальные значения параметров заданы грубо, то за первое приближение удаётся значительно приблизиться к искомым значениям параметров (сократить разницу между начальными и оптимальными значениями параметров более, чем в два

раза). Если начальные значения параметров заданы довольно точно, то требуется всего несколько приближений для получения искоемых параметров.

3.5 Выводы по Главе 3

Выполненные исследования показали, что применение целевых функций на основе метода наименьших квадратов значительно упрощает работу метода парабол, так как целевая функция в этом случае является квадратичной.

На основе метода парабол и исследований точности вычисления «глобального» шага разработан программный алгоритм, который проверен при решении трёх тестовых оптимизационных геодезических задач при разных вариантах задания начальных значений параметров.

Полученные результаты свидетельствуют, что метод парабол эффективен и даёт верные результаты. Это подтверждено сравнением с результатами, полученными в программе Mathcad.

Важно, что метод парабол позволят попасть в область минимума целевой функции за 1-2 приближения, даже если начальные значения параметров заданы очень грубо. Он гарантированно находит решение за малое количество итераций, а также безошибочно определяет направление минимизации целевой функции. Этими преимуществами не обладает ни один из других поисковых методов. Также программная реализация метода парабол показала, что его легко можно адаптировать для решения многомерных задач оптимизации.

Таким образом, обосновано первое защищаемое положение. При обработке результатов геодезических измерений эффективно применение оптимизационного метода парабол с обоснованием шага разностной схемы, что позволяет резко сократить число итераций (до 1-2 итераций) для достижения минимума целевой функции даже при очень грубом задании начальных значений параметров.

ГЛАВА 4 ПРОСТОЙ ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

4.1 Эволюционные алгоритмы

Согласно теории Ч. Дарвина [35], в основе эволюции заложены три принципа: наследственность и изменчивость; борьба за существование; естественный отбор. В начале 1950-х годов сформировался раздел знаний – эволюционное моделирование, в котором принципы дарвинизма использовались для автоматизированного решения различных задач. Над интерпретациями идеи программной реализации эволюционного процесса работали разные учёные отдельно друг от друга:

- эволюционное программирование – основоположник Л. Дж. Фогель, 1960 год [164, 182];
- эволюционные стратегии – И. Рехенберг и Х.-П. Швэфель, 1964 год [187, 188];
- генетические алгоритмы – Д. Г. Холланд, 1975 год [183];
- генетическое программирование – Д. Коза, 1998 год [185].

В начале 1990-х годов перечисленные парадигмы стали рассматривать как частные случаи (разделы) одного направления, названного эволюционные алгоритмы. Позднее данная область расширилась благодаря появлению новых разделов: программирование экспрессии генов, дифференциальная эволюция, нейроэволюция, системы классификаторов.

Таким образом, эволюционные алгоритмы – это раздел эволюционного моделирования, в котором для решения задач функциональной оптимизации используются и моделируются процессы естественного отбора. Эволюционные алгоритмы подсказаны самой природой, поэтому при работе с ними используется упрощённая биологическая терминология.

В настоящее время в основе четырёх основных парадигм эволюционных алгоритмов лежат принципы генетических алгоритмов.

Генетические алгоритмы – это поисковые методы, которые для решения задач оптимизации и моделирования используют операторы случайного подбора,

комбинирования и вариации искомых параметров, т.е. оптимизационная задача решается не классическими методами математического программирования, а с помощью принципов естественного отбора, подсказанных природой: наследование, мутации, отбор и кроссинговер.

Генетическое программирование – процесс автоматического создания или изменения программ с использованием генетических алгоритмов; широко применяется в машинном обучении. С помощью методов генетического программирования «выращиваются» программы, т.е. осуществляется структурное изменение (улучшение) программы для более эффективного решения вычислительной задачи.

Эволюционное программирование похоже на генетическое программирование, но структура программы является фиксированной. Основная идея – формирование гипотез о зависимости целевой переменной от других переменных в виде автоматически синтезируемых программ, выраженных на внутреннем языке программирования. Процесс производства внутренних программ (гипотез) организуется как эволюция в пространстве программ. Когда система находит гипотезу, описывающую исследуемую зависимость достаточно хорошо, начинается применение разнообразных незначительных модификаций такой программы. Указанная схема модификации программы напоминает в некотором смысле анализ чувствительности решений к вариациям исходных данных. Отбор лучшей дочерней программы осуществляется по критерию повышения точности предсказаний. Основные области применения эволюционного программирования – анализ и прогнозирование данных: маршрутизация трафика; эпидемиология; выявление рака; военное планирование; системы управления, идентификации, обработки сигналов и пр. [176].

Эволюционные стратегии схожи с генетическими алгоритмами. Отличие состоит в принципе механизма отбора [86, 88, 175].

Перечисленные парадигмы эволюционных алгоритмов являются поисковыми стратегиями решения задач оптимизации, однако в генетическом и

эволюционном программировании объектом оптимизации является сама программа.

Достоинства эволюционных алгоритмов при программной реализации [177]:

- применимы к широкому классу оптимизационных задач;
- легко комбинируются с другими методами;
- рассматривают большое количество альтернативных решений.

Недостатки эволюционных алгоритмов:

- реализуют локальную оптимизацию;
- являются эвристическими;
- не являются масштабируемыми.

Если алгоритм реализует локальную оптимизацию, то отсутствуют гарантии нахождения оптимального решения в случае многомодальной целевой функции. Данным недостатком обладает большинство поисковых методов.

Эвристический алгоритм (эвристика) – это не полностью математически обоснованный, но при этом практически полезный алгоритм; является достаточным для решения поставленной задачи, но не гарантированно точным. Данный алгоритм может применяться, даже если он даёт неверный результат только в отдельных, достаточно редких и хорошо выделяемых случаях или же даёт неточный, но всё же приемлемый результат. Эвристика эволюционных алгоритмов обусловлена стратегиями слепого поиска, опирающимися на метод проб и ошибок.

Масштабируемый алгоритм – тот, в котором количество вычислительных операций увеличивается прямо пропорционально увеличению объёма обрабатываемых данных.

Эволюционные алгоритмы применяются для создания искусственного интеллекта [164, 175], в машинном обучении, например, при обучении искусственных нейронных сетей [42], в комбинаторной оптимизации [85, 177] и др. Также в настоящее время эти алгоритмы применяются в области геодезии, например, нейронные сети, интегрированные в геоинформационные системы

(ГИС) являются мощным инструментом для модификации электронных карт, разработки сценариев развития территории и др. [77]. Эволюционные алгоритмы используются при автоматизированном дешифрировании данных дистанционного зондирования [111], совмещении фотограмметрических снимков и облаков точек лазерного отражения (ТЛО), вставке моделей в облако ТЛО и др. [78, 169].

Как было указано выше, основой всех эволюционных стратегий являются генетические алгоритмы. Данные алгоритмы относятся к поисковым методам оптимизации. При их программной реализации недостатки эволюционных алгоритмов (локальность оптимизации, эвристика и немасштабируемость) могут быть значительно уменьшены.

4.2 Генетический алгоритм

Согласно теории Дарвина, наследственность, изменчивость и естественный отбор в природе приводят к спонтанному появлению новых решений проблемы выживания и размножения. Изменчивость – неотъемлемое свойство всего живого, а естественный отбор – главный фактор эволюции. Генетические алгоритмы представляют собой симуляцию биологической эволюции на компьютере и использование её принципов при решении задач оптимизации, т.е. постепенного улучшения какого-либо объекта (модели, процесса, явления и т.п.), основанного на случайном изменении и отборе заданных критериев.

Проведём аналогию: эволюция – это процесс оптимизации; особь – объект на определённом этапе оптимизации; мера приспособленности особи – оценка объекта с помощью целевой функции; генотип каждой особи – параметры целевой функции. Таким образом, полезное видоизменение особи от поколения к поколению в процессе эволюции – это изменение параметров целевой функции в процессе оптимизации. Инструментами положительного улучшения являются наследование и мутация, только в случае программной реализации эти процессы представляют собой математические операторы.

Отличительной особенностью генетических алгоритмов является использование оператора «скрещивания», благодаря которому выполняется рекомбинация решений. Несмотря на это, среди данных алгоритмов имеют место те, которые действуют по самому простому сценарию естественного отбора – при бесполом размножении (почкование, фрагментация, деление, споры, вегетативное размножение и др.), т.е. без скрещивания.

Данный алгоритм – это примитивное воплощение процесса эволюции. Он является самым близким аналогом поисковых методов математического программирования, а именно метода случайного поиска.

Рассмотрим простой генетический алгоритм при его программной реализации. Имеем целевую функцию $f(x_1, x_2 \dots x_m)$, которая зависит от m параметров. Вычисляется значение целевой функции при начальных значениях параметров $f^0(x_1, x_2 \dots x_m)$ – это особь нулевого поколения. Далее формируется первое поколение $f_1^1, f_2^1, f_3^1 \dots f_n^1$. Количество особей n может быть задано заранее, т.е. каждое поколение будет состоять из определённого количества особей, например, из десяти, или формироваться случайным образом. В новом поколении каждая особь имеет свой уникальный генотип, благодаря следующим действиям:

- случайному изменению параметров на некоторый заданный шаг k ;
- случайной мутации параметров u .

Как правило, в качестве мутации используется добавление достаточно малой равномерно либо нормально распределённой случайной величины к каждому параметру целевой функции. Данные величины задаются с помощью датчиков случайных чисел [49, 63, 64]. Например, генерацию случайных чисел с равномерным распределением можно получить по одной из формул (31-35):

$$V_{i+1} = \text{frac}(K \cdot V_i); \quad (31)$$

$$V_{i+1} = \text{frac}(K \cdot V_i + \pi); \quad (32)$$

$$V_{i+1} = \text{frac}(V_i + \pi - 2)^3; \quad (33)$$

$$V_{i+1} = \text{frac}(\exp(V_i + \pi)); \quad (34)$$

$$V_{i+1} = \text{frac}(\text{exp}(V_i + \pi)), \quad (35)$$

где V_{i+1} – каждое следующее значение случайного числа равномерного распределения; V_i – предыдущее значение; frac – функция выделения дробной части числа; $K = 8 \cdot T \pm 3$, T – нечётное целое число; exp – функция e^x ; ext – функция 10^x [49].

Исследования показали [64], что наиболее качественными являются датчики, сформированные по формуле (32), при $K = 43$ и $K = 45$.

Для генерации случайных чисел с нормальным распределением возможны следующие варианты [63]:

1) сумма двенадцати последовательных случайных чисел равномерного распределения без числа 6 (36):

$$N = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_{12} - 6; \quad (36)$$

2) вычисление пары случайных чисел нормального распределения посредством пары случайных чисел равномерного распределения (37, 38):

$$N_i = \sqrt{2 \cdot \ln(1/V_i)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot V_{i+1}); \quad (37)$$

$$N_i = \sqrt{2 \cdot \ln(1/V_i)} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot V_{i+1}); \quad (38)$$

3) через преобразование одной из двух последних формул (39):

$$N_i = \sqrt{-2 \cdot \ln(V_i)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot V_{i+1}). \quad (39)$$

Кроме перечисленных датчиков можно использовать специальные функции языков программирования [47]. Например, для генерации последовательности случайных чисел с равномерным распределением в VBA применяется функция `DUniform` (*discrete uniform* – равномерно распределённая последовательность).

Мутации могут быть и полезные, и вредные. Из первого поколения выбирается особь с наилучшим генотипом, т.е. целевая функция с минимальным значением, все остальные целевые функции бракуются (отсеиваются). Лучшая особь становится родителем для следующего поколения. Описанный эволюционный процесс (размножение, мутации, отбор) выполняется от поколения

к поколению до достижения минимума целевой функции f_{\min} . Существует несколько вариантов критериев остановки генетического алгоритма:

- 1) сформировано заданное число поколений;
- 2) закончилось время, отведённое для решения поставленной задачи;
- 3) целевая функция достигла заданного значения точности;
- 4) достигнут заданный уровень сходимости: значения всех целевых функций в одном поколении одинаковы или наименьшее значение целевой функции на протяжении нескольких поколений остается неизменным.

На рисунке 18 представлена визуализация описанного простого генетического алгоритма.

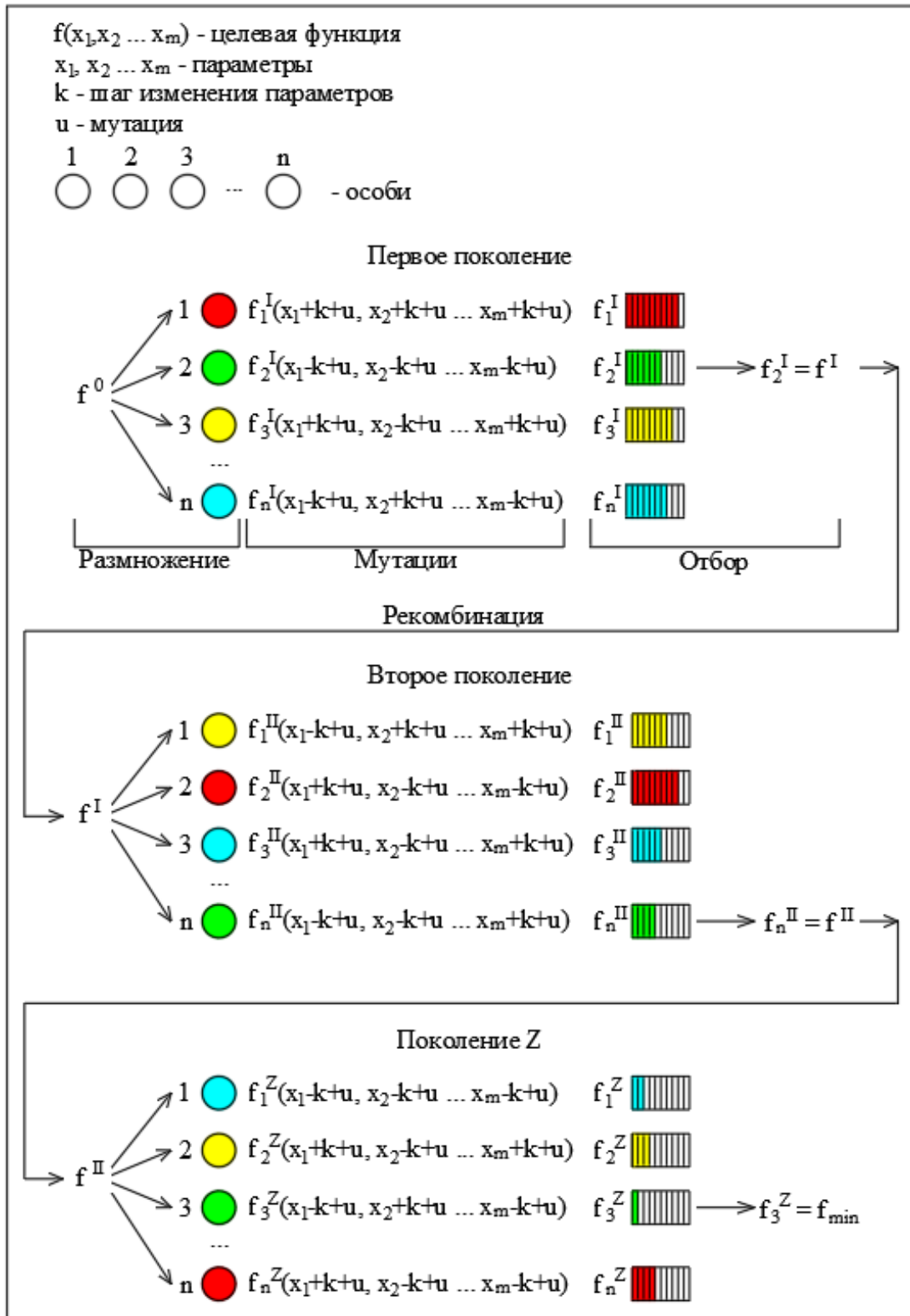


Рисунок 18 – Визуализация простого генетического алгоритма

На рисунке 18 цветные индикаторы показывают меру приспособленности целевой функции (красный – наименее приспособленная, желтый, голубой, зеленый – наиболее приспособленная, т.е. целевая функция с наименьшим значением в текущем поколении).

Экспериментальным путём установлено, несмотря на то, что в каждом новом поколении параметры целевых функций изменяются посредством шага k и случайной мутации u , величина шага должна постепенно уменьшаться. Предложен следующий вариант подобного уменьшения: изменение величины шага параметров целевой функции осуществляется по логарифмическому закону, а последние t итераций с постоянной малой величиной шага (рисунки 19-20):

```
' изменение шага параметров по логарифмическому закону
nn = 500: t = 0.0001 ' число итераций и точность вычислений
k = -k0 / Log(nn - 100) * Log(ii) + k0
If ii > nn - 100 Then k = t
```

Рисунок 19 – Пример изменения шага k параметров, реализованный в VBA

На рисунке 19 nn – заданное количество итераций, ii – номер текущей итерации. Данная форма изменения шага k позволяет варьировать число итераций.

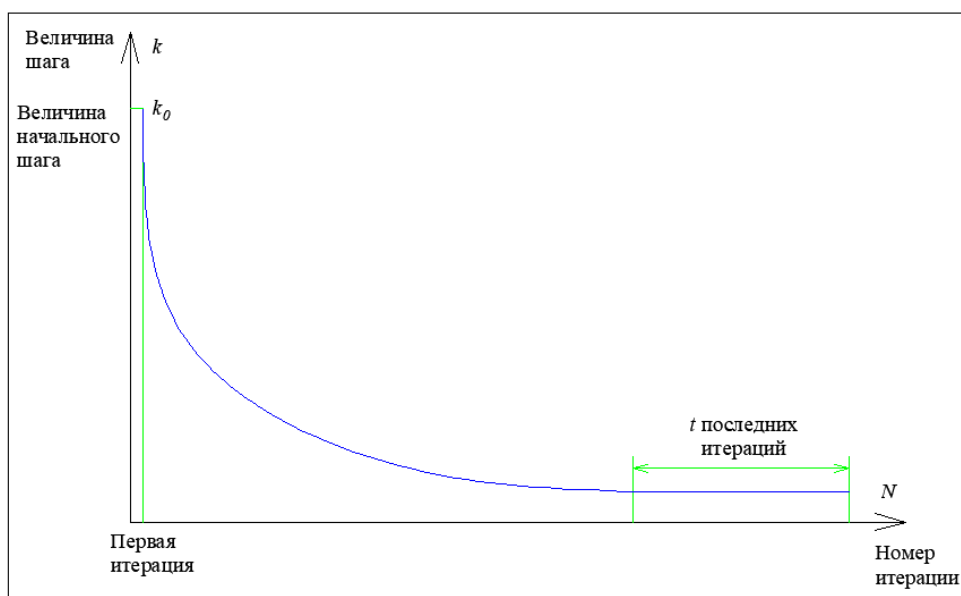


Рисунок 20 – Схема изменения величины шага k параметров целевой функции

На рисунке 21 приведена упрощённая блок-схема программной реализации простого генетического алгоритма. Так как данный алгоритм является эвристическим, то решение, полученное с его помощью, обязательно должно быть оценено фильтром «здорового смысла» – оценка решения человеком (пользователем). Если полученное решение представляется пользователю недостоверным, то, как правило, изменяются (уточняются) начальные значения

параметров. Также возможны изменения в самой программе (например, изменяется: количество особей n в поколении, величина шага k параметров, критерий остановки алгоритма и др.). Подобные изменения, направлены не только на уменьшение эвристики алгоритма, но и являются калибровкой программного кода. Так как фильтр «здравого смысла» выполняется пользователем, на блок-схеме он не отражён.

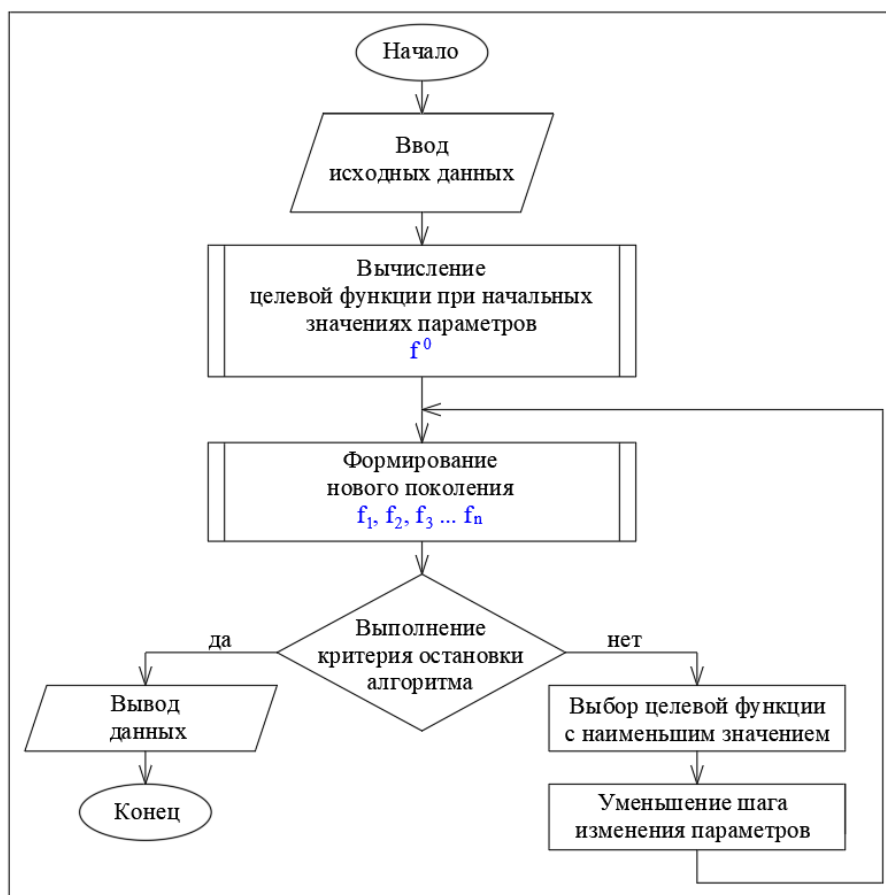


Рисунок 21 – Блок-схема простого генетического алгоритма

На рисунке 22 представлена схема поиска решения (минимума целевой функции) по простому генетическому алгоритму. Окружностями обозначены максимальные изменения целевой функции в каждом поколении, значки в окружностях – это значения целевых функций (особи), f^0 – значение целевой функции при начальных значениях параметров, f_{\min} – минимум целевой функции.

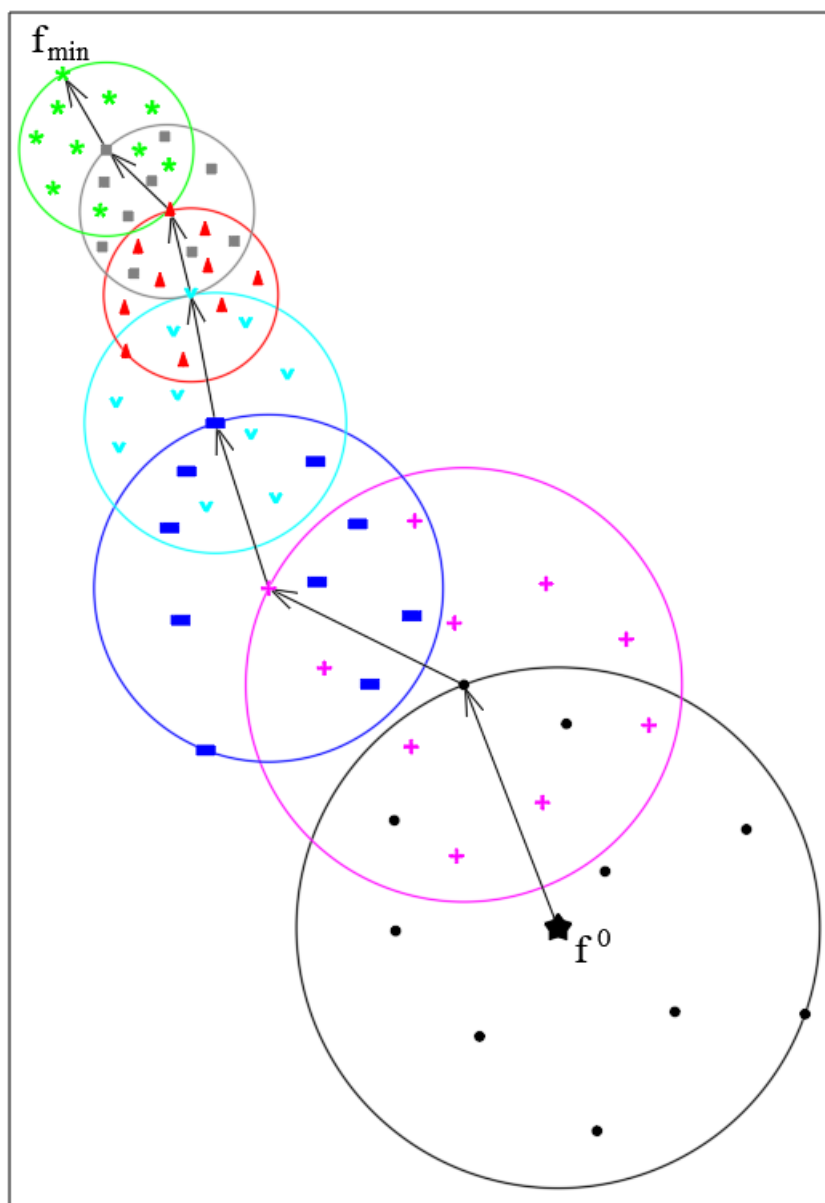


Рисунок 22 – Схема поиска решения оптимизационной задачи простым генетическим алгоритмом

Преимуществом простого генетического алгоритма по сравнению с другими эволюционными стратегиями является простота программной реализации, но сохранение при этом основных эволюционных принципов решения оптимизационных задач: изменчивости, основанной на случайности (мутации), и отбора наилучшего решения.

4.3 Возможные пути уменьшения эвристики генетических алгоритмов

Эвристика генетических алгоритмов предопределяется их основным принципом – случайным изменением параметров целевой функции. Полностью избавиться от эвристики в подобных методах невозможно, так как эвристический характер является их неотъемлемым свойством. Однако существуют пути совершенствования генетических алгоритмов, благодаря которым можно не просто уменьшить эвристическое влияние, но и свести его к минимуму.

Безусловно, данный вопрос является важным при использовании генетических алгоритмов. Эвристическое влияние требует отдельного детального исследования, но относится скорее к задачам эффективной программной реализации математических алгоритмов, поэтому в данном разделе даны лишь рекомендации (размышления автора) о возможных средствах уменьшения эвристики генетических алгоритмов. Для будущих исследований автор определяет следующие направления:

- увеличение исходных (избыточных данных);
- использование, по возможности, в качестве исходных данных измерения разного именованя, например, уравнивание сетей по линейно-угловым измерениям;
- изучение влияния величины начальной мутации на схождение итерационного процесса.

Стоит отметить, что эвристический характер генетических алгоритмов не уменьшает их результативность. Действенность данных методов обоснована теоретическими и практическими исследованиями [20, 26, 85, 175].

4.4 Решение тестовых оптимизационных геодезических задач по простому генетическому алгоритму

На основе теоретических исследований, представленных в разделе 4.2, был разработан программный алгоритм, реализующий простой генетический алгоритм.

В данном разделе приведены результаты решения тестовых оптимизационных задач (аппроксимация результатов обмеров окружностью, комбинированная засечка и многократная линейная засечка) по простому генетическому алгоритму. Решение тестовых задач выполнено с целью проверки работоспособности рассматриваемого оптимизационного метода и определения путей повышения его эффективности. Исходные данные приняты, как не содержащие грубых ошибок, но смоделированы с искажениями измерений по нормальному закону распределения.

4.4.1 Аппроксимация результатов обмеров окружностью

Исходные данные и постановка задачи представлены в разделе 3.4.1. Целевая функция метода наименьших квадратов для задачи аппроксимации окружностью имеет вид (7).

В таблице 11 приведены результаты решения данной задачи простым генетическим алгоритмом при разных вариантах задания начальных значений параметров (Приложение М).

Таблица 11 – Результаты решения задачи аппроксимации результатов обмеров окружностью простым генетическим алгоритмом при разных вариантах задания начальных значений параметров

Начальные значения параметров	Начальное значение целевой функции f^0	Количество итераций	Конечные значения параметров	Минимальное значение целевой функции f_{\min}
$X = 15.000 \text{ м}$ $Y = 15.000 \text{ м}$ $R = 2.000 \text{ м}$	1571	500	$X = 10.032 \text{ м}$ $Y = 10.089 \text{ м}$ $R = 1.079 \text{ м}$	0.0004091
$X = 9.000 \text{ м}$ $Y = 9.500 \text{ м}$ $R = 1.500 \text{ м}$	31.59	500	$X = 10.032 \text{ м}$ $Y = 10.089 \text{ м}$ $R = 1.079 \text{ м}$	0.0003617
$X = 10.000 \text{ м}$ $Y = 10.000 \text{ м}$ $R = 1.000 \text{ м}$	0.6187	500	$X = 10.032 \text{ м}$ $Y = 10.089 \text{ м}$ $R = 1.079 \text{ м}$	0.0003382

4.4.2 Комбинированная засечка

Исходные данные и постановка задачи представлены в разделе 3.4.2. Целевая функция метода наименьших квадратов для комбинированной засечки имеет вид (29).

В таблице 12 приведены результаты решения данной задачи простым генетическим алгоритмом при разных вариантах задания начальных значений параметров (Приложение Н).

Таблица 12 – Результаты решения комбинированной засечки простым генетическим алгоритмом при разных вариантах задания начальных значений параметров

Начальные значения параметров	Начальное значение целевой функции f^0	Количество итераций	Конечные значения параметров	Минимальное значение целевой функции f_{\min}
$X = 139\,000.00\text{ м}$ $Y = 156\,000.00\text{ м}$	7463974	500	$X = 140\,354.63\text{ м}$ $Y = 157\,139.37\text{ м}$	0.01318
$X = 140\,000.00\text{ м}$ $Y = 157\,000.00\text{ м}$	19936	500	$X = 140\,354.63\text{ м}$ $Y = 157\,139.37\text{ м}$	0.01345
$X = 140\,350.00\text{ м}$ $Y = 157\,135.00\text{ м}$	0.4162	500	$X = 140\,354.63\text{ м}$ $Y = 157\,139.37\text{ м}$	0.002841

4.4.3 Многократная линейная засечка

Исходные данные и постановка задачи представлены в разделе 3.4.3. Целевая функция метода наименьших квадратов для многократной линейной засечки имеет вид (30).

В таблице 13 приведены результаты решения данной задачи простым генетическим алгоритмом при разных вариантах задания начальных значений параметров (Приложение П).

Таблица 13 – Результаты решения многократной линейной засечки простым генетическим алгоритмом при разных вариантах задания начальных значений параметров

Начальные значения параметров	Начальное значение целевой функции f^0	Кол-во итераций	Конечные значения параметров	Минимальное значение целевой функции f_{\min}
$X = 0.000 \text{ м}$ $Y = 0.000 \text{ м}$	16288238	500	$X = 2\ 100.145 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.350 \text{ м}$	0.002502
$X = 2\ 000.000 \text{ м}$ $Y = 2\ 000.000 \text{ м}$	43506	500	$X = 2\ 100.145 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.350 \text{ м}$	0.002491
$X = 2\ 100.000 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.000 \text{ м}$	0.9082	500	$X = 2\ 100.145 \text{ м}$ $Y = 2\ 100.350 \text{ м}$	0.001334

Из представленных расчётов видно (таблицы 11-13), простой генетический алгоритм при решении тестовых задач за конечное число итераций даёт те же результаты, что и метод парабол и программа Mathcad даже при грубом задании начальных значений параметров.

4.5 Выводы по Главе 4

Генетические алгоритмы представляют собой скорее популяционногенетический подход к решению задачи поиска, чем единый алгоритм решения. Таким образом, генетические алгоритмы образуют класс алгоритмов поисковой оптимизации, основанных на математическом моделировании биологических механизмов живой природы.

Генетические алгоритмы являются эвристическими, т.е. они не гарантируют обнаружения глобального оптимума, но позволяют найти достаточно хорошее решение за меньшее время, чем другие эволюционные алгоритмы [26, 88, 175].

В данной главе рассмотрен простой генетический алгоритм при решении оптимизационных геодезических задач, а также определены пути уменьшения

эвристического влияния на конечные результаты для дальнейшего совершенствования данного метода.

На основе стратегии простого генетического алгоритма разработан программный алгоритм, который проверен при решении трёх тестовых оптимизационных геодезических задач при разных вариантах задания начальных значений параметров. Полученные результаты показали, что простой генетический алгоритм не менее эффективен, чем метод парабол, и даёт верные результаты за конечное количество итераций. Это подтверждено сравнением с результатами, полученными методом парабол и в программе Mathcad.

Преимуществом простого генетического алгоритма является простота, как с точки зрения программной реализации, так и с точки зрения пользователя. Также стоит отметить его надёжность и сходимости, несмотря на то, что алгоритм является эвристическим. А большое количество итераций при этом является незначительным недостатком, так как благодаря производительности современных компьютеров данный аспект не оказывает отрицательного влияния на работу программы.

Таким образом, обосновано второе защищаемое положение. Применение разработанного простого генетического алгоритма при нелинейной оптимизации геодезических измерений обеспечивает сходимость итерационного процесса для широкого спектра начальных значений параметров, что при сравнении с другими методами значительно упрощает процесс решения и повышает надёжность конечных результатов.

На основе первого и второго защищаемых положений следует рекомендация для дальнейшего совершенствования аппарата математической обработки геодезических измерений поисковыми методами – объединение метода парабол и простого генетического алгоритма в одну методику, состоящую из двух этапов. На первом – методом парабол за 1-2 итерации попасть в область минимума целевой функции. На втором – простым генетическим алгоритмом найти оптимальное решение. Таким образом, используются только преимущества данных методов, а так как простой генетический алгоритм начинает работать уже

в области минимума целевой функции, т.е. в непосредственной близости от оптимального решения, то устраняется его эвристический характер.

ГЛАВА 5 ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРЕНОВ СООРУЖЕНИЙ БАШЕННОГО ТИПА ПО ДАННЫМ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ

В данной главе описан автоматизированный программный комплекс для определения кренов сооружений башенного типа по данным наземного лазерного сканирования (НЛС). Программный комплекс является результатом практической реализации теоретических разработок о возможностях применения поисковых методов (а именно простого генетического алгоритма) при решении оптимизационных задач в геодезической практике [70, 181]. Рассматриваемая задача – одна из множества разнообразных примеров практического приложения поисковых методов в геодезии.

5.1 Постановка задачи

Сооружения башенного типа (дымовые трубы, опоры ЛЭП, вышки, антенны, башни связи и т.п.), независимо от их материала, должны находиться в вертикальном положении в пределах допусков, установленных для таких конструкций. Наряду с наблюдениями за осадками оснований и фундаментов обязательно выполняется определение кренов как в процессе строительства, так и в процессе эксплуатации.

Крен – наиболее характерный показатель деформации сооружения. Определение крена сооружений башенного типа, например дымовых труб, является типичной и часто встречающейся работой в геодезической практике [101, 133, 149, 173]. В настоящее время разработано немало способов для определения крена. Согласно руководству [144] выделяют несколько способов:

- координат;
- направлений (горизонтальных углов);
- малых углов;
- вертикального проектирования;

- зенитных расстояний;
- высокоточного нивелирования;
- направления с одного пункта;
- стереофотограмметричекй.

Для выполнения наблюдений используются как оптические, так и светодальномерные электронные геодезические приборы. Выбор способа зависит от типа сооружения, его высоты, условий застройки, удобства наблюдений.

С развитием и усовершенствованием геодезического оборудования становятся популярными спутниковые методы, наземное лазерное сканирование, использование беспилотных летательных аппаратов и видеоизмерения. Среди этих методов наиболее перспективным является наземное лазерное сканирование в силу своих преимуществ:

- высокая точность измерений;
- принцип дистанционного получения информации обеспечивает безопасность исполнителя при съёмке труднодоступных и опасных районов;
- высокая производительность;
- высокая степень детализации (плотность точечной модели);
- длительность съёмки не больше, чем при других видах наблюдений;
- угол поля зрения большинства современных наземных сканеров позволяет выполнять панорамную съёмку;
- определение пространственных координат точек объекта в полевых условиях;
- трёхмерная визуализация в режиме реального времени, позволяющая на этапе производства полевых работ определить и исключить «мёртвые» зоны.

Отметим, что в настоящее время технологии наземного лазерного сканирования находят эффективное применение в гражданском строительстве и при обследовании инженерных сооружений. В многочисленных трудах и публикациях [32, 33, 98, 148, 149] обоснована эффективность применения данного метода при выполнении наблюдений, в том числе для определения кренов, сооружений башенного типа.

Результатом съёмки наземного лазерного сканирования является трёхмерная модель, состоящая из множества точек, измеренных по внешней поверхности трубы. Геодезический контроль вертикальности сооружений башенного типа проводится как периодически (в процессе строительства и эксплуатации), так и внепланово (после аварий, стихийных бедствий и т.п.). В последнем случае оперативное получение данных о текущем состоянии объекта является важнейшим аспектом.

Несмотря на то, что наземное лазерное сканирование обеспечивает оперативность получения пространственных данных, существует необходимость в камеральной обработке для вычисления величины и направления крена трубы.

Цель создания автоматизированного программного комплекса для определения кренов сооружений башенного типа – это возможность выполнять все необходимые вычисления в поле сразу после съёмки при минимальном участии пользователя в процессе обработки.

5.2 Положения, заложенные в программный комплекс

При разработке программного комплекса использованы следующие положения:

1. Определение крена трубы по множеству измеренных данных путём аппроксимации сечений окружностями, что значительно повышает точность и надёжность полученных результатов.
2. Построение окружностей простым генетическим алгоритмом.
3. Автоматическая фильтрация скана текущего сечения от искажающих данных, которые не вписываются по точности в построенную модель окружности.

Положение 1. Определение кренов оптическими методами на неровные кирпичные и бетонные поверхности может сопровождаться погрешностями наведения. При лазерном сканировании данная проблема сглаживается – плотность точечной модели позволяет определять деформации по множеству измеренных данных. Так как каждая окружность строится по многим десяткам и

сотням точек сечения, появляется возможность без ущерба точности отбраковать точки, которые не вписываются в данную модель. Кроме того, точность определения центра сечения повышается в \sqrt{n} раз (n – число точек в сечении).

Положение 2. Ни одна из существующих технологий измерений не может сравниться с лазерным сканированием по получаемому объёму избыточной информации. Благодаря этой особенности обработка данных НЛС представляет собой явную оптимизационную задачу с огромным количеством исходных данных.

Вписывание окружности в n точек (при $n > 3$) – типичная нелинейная оптимизационная задача. При реализации метода наименьших квадратов, целевая функция будет иметь вид (7). В данном программном комплексе вписывание окружности осуществляется по уже отработанному простому генетическому алгоритму (глава 4).

Положение 3. Особенностью поисковых методов является то, что решение будет найдено, даже если исходные данные содержат грубые ошибки. В этом случае оптимальные значения параметров будут далёкими от истинных, а минимальное значение целевой функции будет значительно отличаться от нуля. Поэтому при использовании поисковых методов нужно обязательно выполнять либо отбраковку грубоошибочных изменения ещё до процесса оптимизации, либо на каждой итерации в процессе оптимизации.

5.3 Методика отбраковки грубоошибочных измерений

Фильтрация скана нужна для того, чтобы удалить те точки конструктивных деталей трубы (рисунок 23), которые могут исказить дальнейшие вычисления, например, сколы кирпичей, стяжки, лестницы, громоотводы, антенны, спутниковые тарелки и т.п.



Рисунок 23 – Примеры различных конструктивных деталей дымовых труб

Подпрограмма отбраковки базируется на оценке качества моделей, построенных по методу наименьших квадратов. Предлагаемая автоматическая фильтрация основана на двух критериях [65]. Во-первых, выполняется обобщённый χ^2 – контроль, который позволяет оценить качество построенной модели (в данном случае – окружности) в целом (критерий Пирсона), он указывает на наличие в исходных данных грубых искажений (40):

$$[vv] \leq \mu_0^2 \cdot \chi^2, \quad (40)$$

где v – отклонения от окружности; μ_0 – априорная (предполагаемая) средняя квадратическая погрешность положения каждой точки; χ^2 – квантиль распределения Пирсона.

Во-вторых, проверяется отклонение v_i каждой точки от построенной окружности, т.е. не превышает ли экстремальная величина предельно допустимого значения (критерий Граббса-Смирнова, иногда называют – типа Граббса, *Grubbs*) (41):

$$v_i \leq \eta \cdot \mu_0 \cdot \sqrt{\frac{r}{n}} = \eta \cdot \mu_0 \cdot \sqrt{\frac{n-3}{n}}, \quad (41)$$

где η – критическая величина распределения экстремального значения; r – количество избыточных для построения окружности точек; n – общее количество точек в окружности.

Критические значения обоих критериев χ^2 и η аппроксимированы для доверительной вероятности 0.95 и легко находятся для любого количества точек n .

Если хотя бы один из указанных критериев не выполняется, то программа находит точку с максимальным отклонением от построенной модели, удаляет её и перестраивает окружность.

Для проверки корректности работы алгоритма по автоматической фильтрации были просчитаны тестовые примеры с антенной (антеннами), лестницами, пролетевшей птицей и др. На рисунке 24 показаны сечения до и после работы подпрограммы отбраковки.

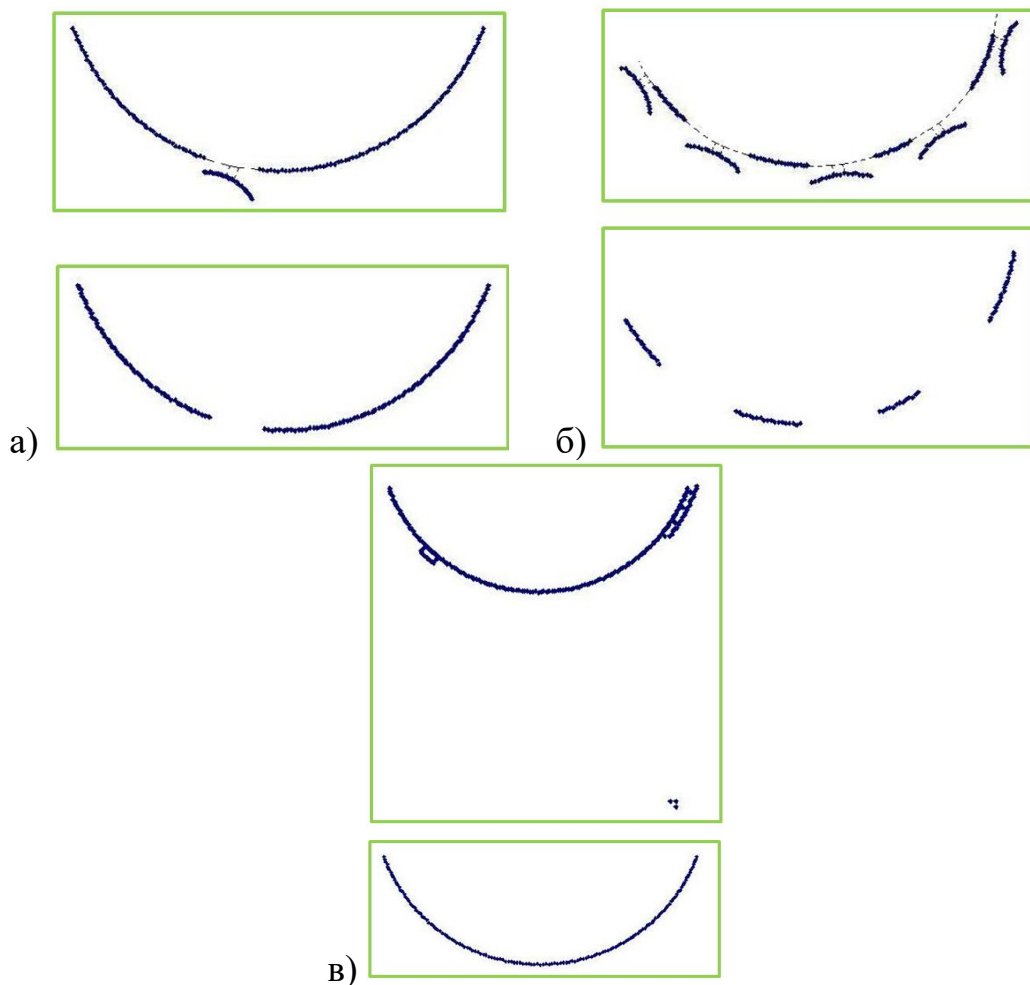


Рисунок 24 – Примеры сечений до и после работы подпрограммы отбраковки:
а) с одной антенной; б) с несколькими антеннами; в) с лестницами и птице

Следует заметить, что не стоит задавать слишком завышенную априорную точность планового положения каждой точки μ_0 , иначе процесс фильтрации может длиться неоправданно долго.

Встречались и тестовые варианты, с которыми алгоритм отбраковки не справлялся. Чрезмерное загромождение сечения скана лишними элементами не позволяло программе эффективно распознать те точки, которые следует отбраковать. Например, если на скан попала часть соседнего здания (рисунок 25), то следует удалить такие точки ещё при предварительной «чистке» скана до ввода в программу.

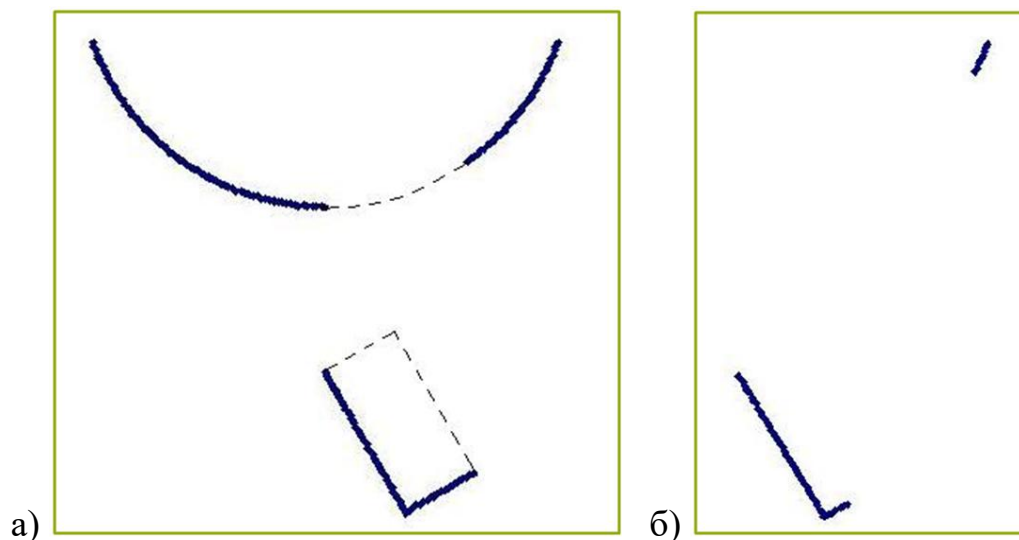


Рисунок 25 – Пример сечения с частью соседнего здания:
а) до подпрограммы отбраковки; б) после подпрограммы отбраковки

5.4 Работа программного комплекса

Основной программный код разделён на подпрограммы, каждая из которых выполняет определённый этап работы:

1. ввод исходных данных;
2. «нарезка» на сечения – построение сечений по точкам лазерного отражения;
3. аппроксимация окружностью каждого сечения и контроль качества построенной окружности;
4. вычисление крена.

Такой подход [54] удобен при программировании для осуществления сквозного контроля. При необходимости каждый блок программы можно изменить, но при этом ничего не менять в основной программе.

После предварительной грубой «чистки» скана, исходные данные (координаты точек лазерного отражения) должны быть представлены в виде текстового документа. Пользователь вводит следующие данные (рисунок 26):

- путь к текстовому документу с исходными данными;
- минимальное количество точек в сечении;
- толщину сечения;
- предполагаемую погрешность планового положения точек на трубе;
- примерный диаметр трубы.

Рисунок 26 – Ввод исходных данных

Автоматическая «нарезка» на сечения осуществляется следующим образом. Программа определяет максимальную высотную отметку z_{\max} , откладывает от неё толщину указанного пользователем сечения и считает все точки, попавшие в этот промежуток. Если количество точек верхнего сечения меньше, чем указал пользователь (рисунок 27), то программа уменьшает отметку и выполняет вышеперечисленные действия до тех пор, пока в сечении не будет достаточного количество точек. Нижнее сечение определяется аналогично, только программа находит минимальную высотную отметку z_{\min} и, в случае необходимости, увеличивает её до выполнения поставленных условий. Среднее сечение z_{mid} выделяется посередине между верхним и нижним сечениями (рисунок 28).



Рисунок 27 – Пример недостаточного количества точек в сечении

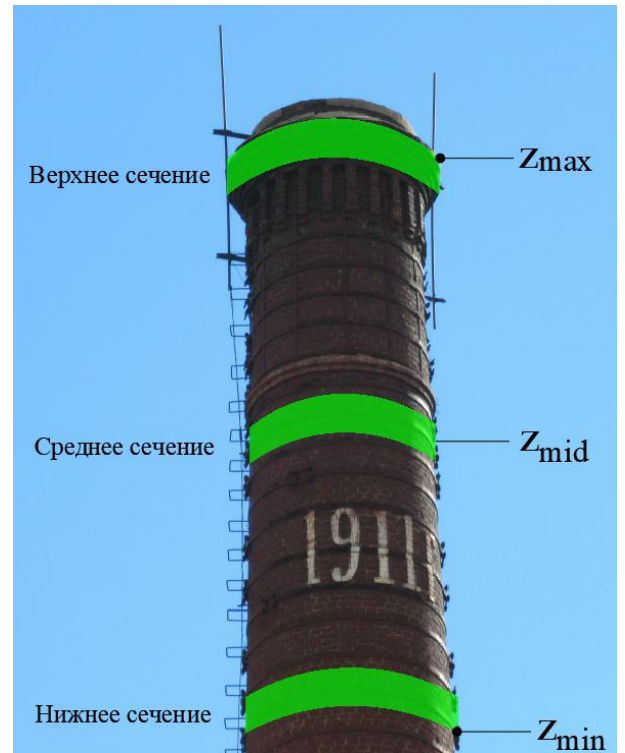


Рисунок 28 – Схема «нарезки» на сечения

Аппроксимация сечения окружностью и контроль качества построенной модели осуществляются по вышеописанному простому генетическому алгоритму и алгоритму автоматической фильтрации. В результате работы данной подпрограммы (рисунок 29):

- определяется высотная отметка текущего сечения и количество точек в сечении;
- вычисляются координаты центра и радиус окружности;
- вычисляется СКП центра окружности.

Помимо этого указывается количество отбракованных точек.

Верхнее сечение					
H	<input type="text" value="35,67"/>	М			
X	<input type="text" value="112916,475"/>	М	Y	<input type="text" value="91608,754"/>	М
			R	<input type="text" value="0,676"/>	М
			СКП центра окружности	<input type="text" value="0,5"/>	мм
Количество точек в сечении			<input type="text" value="163"/>	Отбраковано точек	
			<input type="text" value="0"/>		

Рисунок 29 – Результаты работы подпрограммы аппроксимации сечения окружностью и контроля качества построенной модели

Вычисление величины крена по полученным координатам центров вписанных окружностей выполняется по стандартным формулам (42-44):

$$l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}; \quad (42)$$

$$\alpha = \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad (43)$$

$$\varphi = \arctg \frac{l}{H}, \quad (44)$$

где l – общая линейная величина крена; Δx и Δy – разница плановых координат центров двух сечений в условной, примерно повторяющейся от цикла к циклу системе; α – угловая величина крена, которая определяет его направление; φ – угол наклона; H – высота трубы.

Крен вычисляется относительно верхнего и среднего сечения, среднего и нижнего, верхнего и нижнего (общий) (рисунки 30-31).

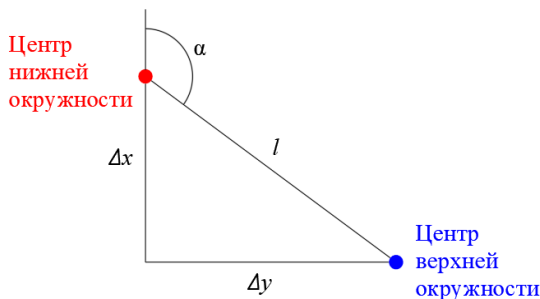


Рисунок 30 – Схема линейной l и угловой α величины крена

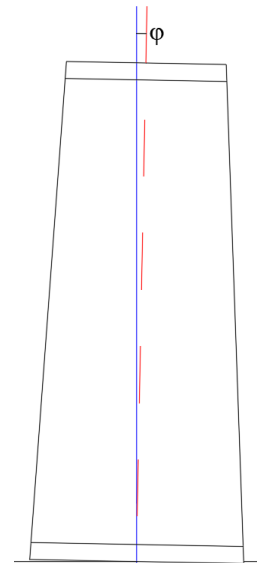


Рисунок 31 – Схема угла наклона φ трубы

Окно пользователя программы и результаты вычислений тестовой задачи представлены на рисунке 32. Исходные данные предоставлены ООО «Научно-производственное предприятие «Бента». Съёмка выполнена лазерной сканирующей системой RIEGL VZ-400.

На разработанный автоматизированный комплекс оформлено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [146].

Определение крена

Общие данные

Имя файла скана: d:\xyz.txt

Количество точек в сечении не менее: 100

Толщина сечения: 0,05 м

СКП точек на окружности: 20 мм

Диаметр трубы: 2 мм

Рассчитать

Верхнее сечение

H: 35,67 м

X: 112916,475 м Y: 91608,754 м R: 0,676 м СКП центра окружности: 0,5 мм

Количество точек в сечении: 163

Отбраковано точек: 0

Среднее сечение

H: 30,7 м

X: 112916,51 м Y: 91608,613 м R: 0,804 м СКП центра окружности: 0,4 мм

Количество точек в сечении: 306

Отбраковано точек: 0

Нижнее сечение

H: 25,74 м

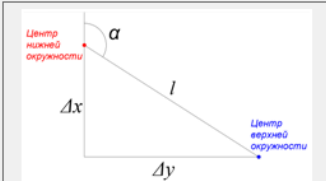
X: 112916,618 м Y: 91608,642 м R: 0,971 м СКП центра окружности: 2,5 мм

Количество точек в сечении: 199

Отбраковано точек: 21

Крен по сечениям

Верхнее - среднее	Среднее - нижнее	Верхнее - нижнее
L: 0,15 м	L: 0,11 м	L: 0,18 м
a: 103,7 град	a: 195,1 град	a: 141,9 град
f: 1,729 град	f: 1,27 град	f: 1,038 град



Всего точек: 57609

OK

Рисунок 32 – Окно пользователя программы с результатами вычислений

5.5 Выводы по Главе 5

Разработанный автоматизированный программный комплекс позволяет значительно ускорить процесс камеральной обработки при определении крена.

Благодаря структурному подходу [54], каждый блок программы можно легко изменить с целью усовершенствования предложенной методики, например:

- увеличить количество сечений для более точного определения положения оси трубы;
- изменить вид целевой функции при съёмке труб с треугольным или квадратным сечением;

- исходными данными для программного комплекса могут быть не только результаты НЛС; определить координаты точек на каждом сечении можно с помощью тахеометра или теодолита.

Кроме того, идеи, которые заложены при создании данного комплекса, могут служить основой при решении многих других оптимизационных задач геодезии.

Использование простого генетического алгоритма в комплексном решении прикладной геодезической задачи показало его практическую значимость. А его применение в совокупности с предложенной оценкой качества моделей, построенных по методу наименьших квадратов, представляет собой эффективную методику быстрой отбраковки грубоошибочных измерений при обработке больших объёмов данных поисковыми методами.

Обосновано третье защищаемое положение. Применение простого генетического алгоритма в совокупности с оценкой качества оптимизируемых моделей (объектов, процессов, явлений и т.п.), построенных по методу наименьших квадратов, представляет собой эффективную методику быстрой отбраковки грубоошибочных измерений при обработке больших объёмов геодезических данных поисковыми методами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация представляет собой законченную научно-квалификационную работу, в которой предлагается новое решение актуальной научной задачи – программной реализация математических алгоритмов поисковых методов с повышением их эффективности и быстродействия.

По результатам выполнения диссертационной работы сделаны следующие выводы и рекомендации:

1. Дано обоснование целесообразности развития и использования в геодезической практике методов поисковой оптимизации. Показана на конкретных примерах эффективность их применения для обработки результатов геодезических измерений.

2. Разработан программный алгоритм, реализующий метод парабол, который за счёт квадратичной аппроксимации целевой функции легко адаптируется для решения оптимизационных геодезических задач, эффективен и гарантированного даёт верные результаты при различных вариантах задания начальных значений параметров.

3. Разработан простой генетический алгоритм поисковой оптимизации, основанный на имитации эволюционного процесса (размножение, мутации, отбор), позволяющий упростить процесс оптимизации по сравнению с другими поисковыми методами как с точки зрения его программной реализации, так и с точки зрения пользователя, за счёт упрощённого математического алгоритма решения.

4. Предложен программный комплекс, реализующий простой генетический алгоритм, позволяющий в совокупности с методикой оценки качества оптимизируемых моделей (объектов, процессов, явлений и т.п.), построенных по методу наименьших квадратов, эффективно выделять и отбраковывать грубые ошибки измерений при обработке больших объёмов данных.

5. Эффективность предложенных поисковых методов (метода парабол и простого генетического алгоритма) подтверждена при решении тестовых

оптимизационных геодезических задач при разных вариантах задания начальных значений параметров.

6. Разработан автоматизированный программный комплекс для решения прикладной геодезической оптимизационной задачи (определение кренов дымовых труб по данным наземного лазерного сканирования) с применением поисковой стратегии простого генетического алгоритма. Данный комплекс представляет собой готовую технологию и позволяет значительно ускорить процесс камеральной обработки при определении крена.

7. Перспективы исследований состоят в расширении спектра поисковых методов и их адаптации для более широкого применения в геодезической практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абу, Д. И. Математическая обработка и анализ точности наземных пространственных геодезических сетей методами нелинейного программирования и линейной алгебры: дис. ... кан. техн. наук: 05.24.01 / Дака Имад Абу. – Новополюцк, 1998. – 142 с.
2. Авакян, В. В. Прикладная геодезия. Технологии инженерно-геодезических работ [Текст] / В. В. Авакян. – М.: Инфра-Инженерия, 2016. – 2-е изд. – 588 с. – ISBN 978-5-9729-0110-4.
3. Азанов, В. М. Оптимизация коррекции околокруговой орбиты искусственного спутника Земли по вероятностному критерию [Текст] / В. М. Азанов, Ю. С. Кан // Труды ИСА РАН. – 2015. – Т. 65. – №2. – С. 18-26.
4. Аккерман, А. Рост производительности и развитие фотограмметрии [Текст] / А. Аккерман // Геоматика. – 2011. – №1. – С. 23-32.
5. Алкачев, Т. Э. История и пути развития электронных геодезических приборов [Текст] / Т. Э. Алкачев, Н. А. Шишов, М. А. Пастухов // Наука. Техника. Технологии. (Политехнический вестник). – 2013. – №3. – С. 37-39.
6. Андрианов, А. Л. Зарождение и ранняя история линейного программирования: дис. ... кан. физ.-мат. наук: 07.00.10 / Александр Львович Андрианов. – М., 2018. – 215 с.
7. Аоки, М. Введение в методы оптимизации. Основы и приложения нелинейного программирования [Текст] / М. Аоки; пер. с английского Э. Б. Дубро. – М.: Наука, 1977. – 343 с.
8. Аппроксимация данных методом наименьших квадратов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://csaa.ru/pproksimacija-dannyh-metodom-naimenshih-kvadratov/> (дата обращения: 21.02.2018).
9. Асламова, В. С. Оптимизация технологических процессов. Часть 1. Метод Лагранжа и численные методы безусловной оптимизации функции одной переменной [Текст]: Учеб. пособие / В. С. Асламова, И. В. Васильев, О. А. Засухина. – Ангарск: АГТА, 2005. – 104 с.

10. Баран, П. И. Исследование точности решения геодезических задач методами математического программирования [Текст] / П. И. Баран // Инженерная геодезия. – 1987. – №30. – С. 5-8.

11. Батищев, Д. И. Поискные методы оптимального проектирования [Текст] / Д. И. Батищев. – М.: Советское радио, 1975. – 216 с.

12. Батищев, Д. И. Методы оптимального проектирования [Текст]: Учеб. пособие для вузов / Д. И. Батищев. – М.: «Радио и связь», 1984. – 248 с.

13. Батищев, Д. И. Численные методы [Текст]: Учеб. пособие / Д. И. Батищев. – Липецк: Изд-во Липецкого государственного технического университета, 2018. – 72 с. – ISBN 978-5-88247-900-7.

14. Белл, Э. Т. Творцы математики [Текст] / Э. Т. Белл. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.

15. Беллман, Р. Динамическое программирование [Текст] / Р. Беллман; пер. с английского. И. М. Андреевой, А. А. Корбут, И. В. Романовского, И. Н. Соколовой; под редакцией Н. Н. Воробьева. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.: ил.

16. Беллман, Р. Прикладные задачи динамического программирования [Текст] / Р. Беллман, С. Дрейфус; пер. с английского Н. М. Митрофановой, А. А. Первозванского, А. П. Хусу, О. В. Шалаевского; под редакцией А. А. Первозванского. – М.: Наука, 1965. – 458 с.

17. Беспалов, Н. А. Экономико-математические методы в топографо-геодезическом производстве [Текст] / Н. А. Беспалов, А. И. Голубцов, А. А. Синдеев. – М.: Недра, 1983. – 320 с.

18. Бирюков, Р. С. Методы оптимизации в примерах и задачах [Текст]: Учебно-методическое пособие / Р. С. Бирюков, С. Ю. Городецкий, С. А. Григорьева, З. Г. Павлючонок, В. П. Савельев. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 101 с.

19. Богданова, Е. Л. Оптимизация в проектном менеджменте: нелинейное программирование [Текст]: Учеб. пособие / Е. Л. Богданова, К. А. Соловейчик, К. Г. Аркина. – СПб.: Университет ИТМО, 2017. – 190 с.

20. Большакова, Е. И. Искусственный интеллект. Алгоритмы эвристического поиска [Текст]: Учеб. пособие / Е. И. Большакова, М. Г. Мальковский, В. Н. Пильщиков. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ, 2002. – 83 с.

21. Большая советская энциклопедия. Готфрид Вильгельм Лейбниц [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.rubricon.com/qe.asp?qtype=1&id=1&ii=1&srubr=0&fstring=%EВ%E5%E9%E1%ED%E8%F6> (дата обращения 13.11.2017).

22. Брынь, М. Я. Уравнивание геодезических измерений параметрическим способом [Текст]: Учеб. пособие / М. Я. Брынь, А. В. Астапович, Д. А. Афонин. – СПб.: ПГУПС, 2014. – 49 с.

23. Брынь, М. Я. Построение прогнозной модели поисковым методом нелинейного программирования по геодезическим данным [Текст] / М. Я. Брынь, Г. Г. Шевченко // Инженерные изыскания. – 2019. – №4. – С. 48-58.

24. Брынь, М. Я. Уравнивание пространственных геодезических построений поисковыми методами Пауэлла и Девиса-Свенна-Кемпи [Текст] / М. Я. Брынь, Г. Г. Шевченко // Приложение к журналу Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. Сборник статей по итогам научно-технической конференции. – 2019. – №10. – С. 26-31.

25. Будо, А. Ю. Сравнительный анализ результатов уравнивания, полученных по двум полярным методикам при обработке плановых геодезических сетей [Текст] / А. Ю. Будо // Вестник ПГУ. Серия Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2010. – №12. – С. 115-122.

26. Бураков, М. В. Генетический алгоритм: теория и практика [Текст]: Учеб. пособие / М. В. Бураков. – СПб.: ГУАП, 2008. – 164 с. – ISBN 978-5-8088-0298-8.

27. Бурша, М. Основы космической геодезии. Часть I. Геометрическая космическая геодезия [Текст] / М. Бурша; пер. с чешского А. В. Буткеевича, Б. Н. Дьякова; под редакцией А. В. Буткеевича. – М.: Недра, 1971. – 128 с.

28. Бурша, М. Основы космической геодезии. Часть II. Динамическая космическая геодезия [Текст] / М. Бурша; пер. с чешского А. В. Буткеевича, В. В. Киричука; под редакцией М. У. Сагитова. – М.: Недра, 1975. – 280 с.

29. Быков, Н. Н. Уравнивание инженерно-геодезических сетей методом сопряжённого градиента [Текст] / Н. Н. Быков // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1981. – №1. – С. 25-28.

30. Вайнаукас, В. В. Система моделей оптимизации и оценки геодезических и фотограмметрических опорных сетей [Текст] / В. В. Вайнаукас // Геодезия и картография. – 1979. – №8. – С. 23-30.

31. Вайнаукас, В. В. Оптимизация и оценка геодезической и фотограмметрической измерительной информации при построении опорных сетей [Текст] / В. В. Вайнаукас // Geodesy and Cartography. – 1983. – Т. 12. – №1. – С. 26-34.

32. Валиева, А. Р. Обоснование применения лазерного сканирования в оценке деформаций высотных конструкций [Текст] / А. Р. Валиева // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2016. – №4. – С. 60-64.

33. Вальков, В. А. Геодезические наблюдения за процессом деформирования высотных сооружений с использованием технологии наземного лазерного сканирования: дис. ... кан. техн. наук: 25.00.32 / Вячеслав Александрович Вальков. – СПб., 2015. – 158 с.

34. Вейс, Г. Геодезическое использование искусственных спутников Земли. [Текст]: Монография / Г. Вейс; пер. с английского А. М. Микиша. – М.: Недра, 1967. – 234 с.

35. Весёлов, Е. А. Дарвинизм [Текст]: Учебник для педагогических институтов / Е. А. Весёлов. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР, 1955. – 451 с.

36. Вершик, А. М. О Л. В. Канторовиче и линейном программировании [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mathsoc.spb.ru/pantheon/kantorov/vershik.html> (дата обращения 12.02.2018).

37. Видуев, Н. Г. Дисперсионный анализ в теории и практике геодезических измерений [Текст] / Н. Г. Видуев, Г. С. Кондра. – М.: Недра, 1968. – 103 с.
38. Видуев, Н. Г. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений [Текст] / Н. Г. Видуев, Г. С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.
39. Видуев, Н. Г. Теория оптимизации в инженерной геодезии [Текст] / Н. Г. Видуев, Н. Т. Ковтун // Инженерная геодезия. – 1975. – №18. – С. 63-73.
40. Виленкин, Н. Я. Популярная комбинаторика [Текст] / Н. Я. Виленкин. – М.: Наука, 1975. – 208 с.
41. Волжанин, С. Д. Уравнивание геодезических сетей методом Lp-оценок [Текст] / С. Д. Волжанин // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1984. – №40. – С. 20-23.
42. Волков, А. В. Разработка методики автоматизированного дешифрирования изображений топографических объектов с использованием нейросетевых методов: дис. ... кан. техн. наук: 25.00.32 / Алексей Васильевич Волков. – СПб., 2006. – 159 с.
43. Вычислительная мощность: от первого ПК до современного суперкомпьютера [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ichip.ru/novosti/vychislitelnaaya-moshhnost-43100> (дата обращения 03.05.2018).
44. Гаврилова, Л. А. Оптимизация фотограмметрической обработки космических снимков для целей мониторинга объектов недвижимости [Текст] / Л. А. Гаврилова, А. Н. Лимонов // Науки о Земле. – 2017. – №3. – С. 42-50.
45. Галажинская, О. Н. Теория случайных процессов [Текст]: Учеб. пособие / О. Н. Галажинская, С. П. Моисеева. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. – Ч. 1. – 128 с.
46. Гапанович, В. С. Методы решения оптимизационных задач [Текст]: Учеб. пособие / В. С. Гапанович, И. В. Гапанович. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2014. – 272 с. – ISBN 978-5-9961-0861-9.
47. Генерация последовательности случайных чисел [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://uc-r.github.io/generating_random_numbers/ (дата обращения 13.01.2019).

48. Гергель, В. П. Современные методы принятия оптимальных решений [Текст]: Учеб. пособие / В. П. Гергель, В. А. Гришагин, С. Ю. Городецкий. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 2001. – 119 с.

49. Гильде, В. С микрокалькулятором в руках [Текст] / В. Гильде, З. Альтрихтер; пер. с немецкого Ю. А. Данилова. – М.: Мир, 1980. – 222 с.: ил.

50. Глушков, В. В. Космическая геодезия: методы и перспективы развития [Текст] / В. В. Глушков, К. К. Несретдинов, А. А. Шаравин. – М.: Институт политического и военного анализа, 2002. – 448 с.: ил.

51. Годунов, С. К. Введение в теорию разностных схем [Текст] / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М: Физматгиз, 1962. – 340 с.

52. Городецкий, С. Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации [Текст]: Учеб. пособие / С. Ю. Городецкий. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 219 с.

53. Гребенникова, И. В. Методы оптимизации [Текст]: Учеб. пособие / И. В. Гребенникова. – Екатеринбург: УрФУ, 2017. – 148 с. – ISBN 978-5-7996-2090-5.

54. Гудман, С. Введение в разработку и анализ алгоритмов [Текст]: Монография / С. Гудман, С. Хидетниemi; пер. с английского Ю. Б. Котова, Л. В. Сухаревой, Л. В. Ухова; под редакцией В. В. Мартынюка. – М.: Мир, 1981. – 368 с.

55. Гутер, Р. С. Отыскание экстремумов функций большого числа переменных [Текст] / Р. С. Гутер, П. А. Гайдаев // Вестник ВИА им. Куйбышева. – 1995. – №79. – С.108-115.

56. Данциг, Дж. Б. Линейное программирование, его применения и обобщения [Текст] / Дж. Б. Данциг; перевод с английского Г. Н. Андрианова, Л. И. Горькова, А. А. Корбута, А. Н. Ляпунова; общая редакция и предисловие Н. Н. Воробьева. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

57. Дегтярёв, А. М. Использование методов оптимизации для решения инженерно-геодезических задач [Текст] / А. М. Дегтярёв, В. В. Ялтыхов // Вестник СГУГиТ. – 2015. – №1 (29). – С. 24-33.

58. Доронкина, А. Н. Подход к моделированию процесса оптимизации параметров эллиптических орбит спутниковой системы [Текст] / А. Н. Доронкина // Программные продукты и системы. – 2015. – №1 (109). – С. 87-91. DOI: 10.15827/0236-235X.109.087-091.

59. Елисеева, Н. Н. Применение поисковых методов при решении нелинейных оптимизационных задач [Текст] / Н. Н. Елисеева // Сборник материалов XIV Международной научно-практической конференции, посвящённой 25-летию Конституции Республики Беларусь «Модернизация хозяйственного механизма сквозь призму экономических, правовых, социальных и инженерных подходов». – Минск: БНТУ. – 2019. – С. 364-369.

60. Елисеева, Н. Н. Применение метода поиска при решении оптимизационных задач в геодезии [Текст] / Н. Н. Елисеева // Сборник тезисов докладов XVII Всероссийской конференции-конкурса студентов и аспирантов горно-геологического, нефтегазового, энергетического, машиностроительного и металлургического профиля. – СПб.: СПбГУ. – 2019. – С. 160.

61. Емельянов, В. Н. Численные методы: введение в теорию разностных схем [Текст]: Учеб. пособие / В. Н. Емельянов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 188 с. – ISBN 978-5-534-06617-3.

62. Жаров, В. И. Геодезические измерения на радиотелескопе РАТАН-600 [Текст] / В. И. Жаров // Юбилейный сборник – САО РАН 50 лет. – 2018. – С. 75-85.

63. Зубов, А. В. Моделирование распределения поправок по результатам уравнивания геодезических сетей на ЭВМ [Текст] / А. В. Зубов // Вопросы совершенствования маркшейдерско-геодезических работ. – СПб.: Ленинградский горный институт. – 1991. – С. 67-70.

64. Зубов, А. В. Автоматизированный контроль качества проектирования и обработки маркшейдерско-геодезических сетей: дис. ... кан. техн. наук: 05.24.01 / Андрей Владимирович Зубов. – СПб., 1997. – 171 с.

65. Зубов, А. В. Оценка качества моделей, построенных по методу наименьших квадратов [Текст] / А. В. Зубов, В. В. Беляев, Т. А. Евтеева // Маркшейдерский вестник. – 2011. – №1 (81). – С. 39-42.

66. Зубов, А. В. Применение градиентного метода при решении геодезических задач [Текст] / А. В. Зубов, Н. С. Павлов // Труды межвузовской научно-практической конференции. – СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского. – 2013. – С. 90-93.

67. Зубов, А. В. Оценка стабильности опорных и деформационных маркшейдерско-геодезических сетей [Текст] / А. В. Зубов, Н. С. Павлов // Маркшейдерский вестник. – 2013. – №2 (94). – С. 21-23.

68. Зубов, А. В. Решение маркшейдерско-геодезических задач поисковыми методами [Текст] / А. В. Зубов, Н. Н. Елисеева // Маркшейдерский вестник. – 2017. – №5 (120). – С. 35-38. – ISSN 2073-0098.

69. Зубов, А. В. Применение поисковых методов при решении оптимизационных нелинейных инженерно-геодезических задач [Текст] / А. В. Зубов, Н. Н. Елисеева // Материалы II Всероссийской научно-практической конференции «Совершенствование средств и методов сбора и обработки геопространственной информации и системы подготовки специалистов в области топогеодезического и навигационного обеспечения». – СПб.: ВКА им. А. Ф. Можайского. – 2018. – С. 372-377.

70. Зубов, А. В. Определение кренов строительных сооружений башенного типа путём аппроксимации результатов обмеров окружностью [Текст] / А. В. Зубов, Н. Н. Елисеева // Материалы II Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы геодезии, кадастра, рационального земле- и природопользования». – Тюмень: Тюменский индустриальный университет. – 2019. – С. 145-149.

71. Зубов, А. В. Применение методов поисковой оптимизации в геодезической практике [Текст] / А. В. Зубов, Н. Н. Елисеева // Труды Международной научно-практической конференции «Современные проблемы инженерной геодезии». – СПб.: ПГУПС. – 2019. – С. 31-35.

72. Зубов, А. В. Применение метода оптимизационной параболы для решения нелинейных маркшейдерско-геодезических задач [Текст] / А. В. Зубов, Н. Н. Елисеева // Маркшейдерский вестник. – 2019. – №1 (128). – С. 24-27. – ISSN 2073-0098.

73. Зуховицкий, С. И. Линейное и выпуклое программирование [Текст] / С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. – 2-е изд., пер. и доп. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

74. Иванов, А. В. Компьютерные методы оптимизации оптических систем [Текст]: Учеб. пособие / А. В. Иванов. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2010. – 114 с.

75. Ильин, В. А. Математический анализ. Продолжение курса [Текст]: Учебник / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов; под редакцией А. Н. Тихонова. – М.: Издательство МГУ, 1987. – 358 с.

76. Импортзамещение программного обеспечения в госсекторе [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.tadviser.ru/index.php/> (дата обращения 27.09.2018).

77. Интеллектуализация и поддержка принятия решений в геоинформатике. Технологии искусственного интеллекта и экспертные системы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://eor.dgu.ru/lectures_f/ (дата обращения 12.03.2018).

78. Искусственный интеллект и PhotoScan [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.geoscan.aero/themes/geoscan/assets/seminary/files> (дата обращения 04.04.2019).

79. История создания вычислительных машин [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://edu.mccme.ru/School/INet/sch1685/history.htm> (дата обращения 15.06.2018).

80. История развития геодезических приборов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.nngasu.ru/geodesy/classification/istoriya/> (дата обращения 14.06.2018).

81. История становления и развития теории оптимизации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://m.studme.org/183569/matematika_himiya_fizik/istoriya_stanovleniya_razvitiya_teorii_optimizatsii (дата обращения 27.10.2017).

82. История хронометра. Время, хронометры и долгота [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.randewy.ru/nav/histor2.html> (дата обращения 27.03.2020).

83. Как и зачем мерить FLOPSы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/company/intel/blog/144388/> (дата обращения 19.02.2020).

84. Карманов, В. Г. Математическое программирование [Текст] / В. Г. Карманов. – М.: Наука, 1975. – 272 с.: ил.

85. Карпенко, А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой [Текст]: Учеб. пособие / А. П. Карпенко. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 446 с.

86. Карпов, В. Э. Методологические проблемы эволюционных вычислений [Текст] / В. Э. Карпов // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2012. – №4. – С. 95-102.

87. Каррыев, Б. Интернет: цифровая революция эры мгновенной коммуникации. Мегасила, история и влияние на общество [Текст] / Б. Батыр. – Екатеринбург: Издательские решения, 2017. – 490 с.: ил. – ISBN 978-5-4485-2608-4.

88. Керимов, А. К. Эволюционный алгоритм для решения задачи автоматической классификации [Текст] / А. К. Керимов, Р. И. Давудова // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2009. – №1. – С. 74-79.

89. Клыпин, И. А. Разработка и исследование алгоритма математической обработки геодезических сетей в разных системах координат: дис. ... кан. техн. наук: 25.00.32 / Игорь Андреевич Клыпин. – М., 2011. – 90 с.

90. Клыпин, И. А. Современные задачи уравнительных вычислений [Текст] / И. А. Клыпин // Приложение к журналу Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. Сборник статей по итогам научно-технической конференции. – 2011. – №4. – С. 52-53.

91. Когут, А. Т. Метод полиномиальной аппроксимации в задачах оптимизации, параметрической идентификации и траекторного управления нелинейными динамическими объектами: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.01 / Алексей Тарасович Когут. – Омск, 2009. – 372 с.

92. Козин, Е. В. Фотограмметрия [Текст]: Учеб. пособие / Е. В. Козин, А. Г. Карманов, Н. А. Карманова. – СПб: Университет ИТМО, 2019. – 142 с.

93. Коробочкин, М. И. Математическое моделирование в геодезии [Текст]: Учеб. пособие для студентов вузов / М. И. Коробочкин. – М.: ГУЗ, 2011. – 316 с. – ISBN 978-5-9215-0210-9.

94. Коробочкин, М. И. Математическое моделирование геопространственных данных [Текст]: Учебник / М. И. Коробочкин, Е. В. Калинова, А. Д. Тихонов. – М.: ГУЗ, 2017. – 377 с. – ISBN 978-5-9215-0333-5.

95. Коугия, В. А. Математическое моделирование при обработке геодезических измерений [Текст]: Учеб. пособие / В. А. Коугия. – СПб, 2007. – 100 с.

96. Коугия, В. А. Определение градиентным методом элементов связи между трёхмерными системами координат [Текст] / В. А. Коугия, Н. В. Канагин // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2008. – №2. – С. 22-28. – ISSN 0536-101X.

97. Коугия, В. А. Избранные труды [Текст]: Монография / В. А. Коугия; под ред. М. Я. Брыня. – СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2012. – 448 с.

98. Кошан, Е. К. Возможности, преимущества и недостатки наземного лазерного сканирования [Текст] / Е. К. Кошан // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. – 2017. – Т. 9. – №1. – С. 27-30. – ISSN 2618-981X.

99. Кравцов, В. В. Роль компьютерной техники в цифровой картографии [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.vishagi.ru/publish/ck1.html> (дата обращения 17.08.2018).

100. Красикова, М. В. Оценка точности неизвестных при решении системы нормальных уравнений методом сопряжённых градиентов [Текст] / М. В. Красикова // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1969. – №5. – С. 79-82.

101. Крен дымовых труб [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.breegs.ru/geodezicheskie-raboty/n249.html> (дата обращения 22.06.2018).

102. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование [Текст]: Учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск.: Высш. шк., 1994. – 286 с.: ил. – ISBN 5-339-00961-0.

103. Кузьменко, И. Н. Применение теории случайных функций в геодезии [Текст]: Монография / И. Н. Кузьменко, Ю. В. Полищук, Л. А. Шаповалова. – Киев: Издательское объединение «Вища школа», 1980. – 94 с.

104. Куштин, В. И. Разработка и исследование методов аналитического трансформирования снимков и их использование при решении научно-технических задач: дис. ... кан. техн. наук: 05.24.02 / Владимир Иванович Куштин. – Ростов-на-Дону, 1999. – 228 с.

105. Ларин, Р. М. Методы оптимизации. Примеры и задачи [Текст]: Учеб. пособие / Р. М. Ларин, А. В. Плясунов, А. В. Пятник. – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 2003. – 115 с.

106. Ларченко, Е. Г. Механизация вычислительных работ [Текст] / Е. Г. Ларченко. – М.: Геодезиздат, 1956. – 300 с.

107. Левчук, Г. П. Прикладная геодезия: Основные методы и принципы инженерно-геодезических работ [Текст]: Учебник для вузов / Г. П. Левчук, В. Е. Новак, В. Г. Конусов. – М.: Недра, 1981. – 438 с.

108. Лесин, В. В. Основы методов оптимизации [Текст]: Учеб. пособие / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. – 4-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 344 с. – ISBN 978-5-8114-1217-4.

109. Лесных, Н. Б. Теория математической обработки геодезических измерений. Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://textarchive.ru/c-1246773-pall.html> (дата обращения 26.03.2018).

110. Линник, Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений [Текст] / Ю. В. Линник. – 2-е изд., доп. и испр. – М.: Физмалит, 1962. – 349 с.

111. Луманн, Т. Ближняя фотограмметрия и 3D-зрение [Текст] / Т. Луманн, С. Робсон, С. Кайл, Я. Бом; пер. с английского В. А. Князя, В. В. Князя. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 704 с. – ISBN 978-5-9710-5298-2.

112. Мазуров, Б. Т. Метод наименьших квадратов (история и развитие) [Текст] / Б. Т. Мазуров, В. А. Падве // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. – 2017. – Т. 1. – №1. – С. 150-154.

113. Мазуров, Б. Т. Математическое моделирование при исследовании геодинамики [Текст]: Монография / Б. Т. Мазуров. – Новосибирск: Агентство «Сибпринт», 2019. – 360 с.

114. Макаров, Г. В. Оценка точности при использовании поисковых методах уравнивания [Текст] / Г. В. Макаров, В. В. Афанасьев, Б. В. Афанасьев // Геодезия и картография. – 1981. – № 11. – С. 20-22.

115. Машимов, М. М. Планетарные теории геодезии [Текст] / М. М. Машимов. – М.: Недра, 1982. – 261 с.

116. Методы одномерной оптимизации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://techn.sstu.ru/kafedri/> (дата обращения 09.12.2017).

117. Микиша, А. М. Космические методы в геодезии [Текст] / А. М. Микиша. – М.: Знание, 1983. – 64 с.: ил.

118. Мину, М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы [Текст] / М. Мину; пер. с французского и предисловие А. В. Штерна. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 488 с. – ISBN 5-02-013980-7.

119. Михайлович, Е. В. Методика учета возмущающих сил и преобразования координат в динамическом методе космической геодезии: дис. ...

кан. техн. наук: 25.00.32 / Елена Владимировна Михайлович. – Новосибирск, 2010. – 134 с.

120. Михайлович, Е. В. Исследование гравитационного влияния Луны и Солнца на движение космических аппаратов [Текст] / Е. В. Михайлович // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. 2010. – №6. – С. 25-28.

121. Михеев, С. Е. Выпуклая квадратичная аппроксимация [Текст] / С. Е. Михеев // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9. – №4. – С. 66-76.

122. Мицкевич, В. И. Уравнивание и оценка точности геодезических засечек под различными критериями оптимальности [Текст] / В. И. Мицкевич, В. В. Ялтыхов // Геодезия и картография. – 1994. – №7. – С. 14-16. – ISSN 0016-7126.

123. Мицкевич, В. И. Особенности уравнивания геодезических сетей по методу наименьших модулей [Текст] / В. И. Мицкевич, В. В. Ялтыхов // Геодезия и картография. – 1997. – №5. – С. 23-24. – ISSN 0016-7126.

124. Мицкевич, В. И. Теория математической обработки геодезических построений методами нелинейного программирования: дис. ... д-ра техн. наук: 25.00.32 / Валерий Иванович Мицкевич. – Новополюцк, 2004. – 133 с.

125. Мицкевич, В. И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования [Текст]: Учеб. пособие / В. И. Мицкевич. – Новополюцк: ПГУ, 2007. – 64 с.

126. Мицкевич, В. И. Математические методы и модели на ЭВМ [Текст]: Учебно-метод. комплекс / В. И. Мицкевич. – Новополюцк: ПГУ, 2007. – 184 с. – ISBN 978-985-418-568-2.

127. Морозов, Ю. М. История и методология вычислительной техники [Текст]: Учеб. пособие / Ю. М. Морозов. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2012. – 312 с.

128. Мутталибова, Ш. Ф. Оптимизация режимов функционирования RTK GPS геодезических сетей для кадастровых измерений [Текст] / Ш. Ф. Мутталибова, Ч. Г. Танырвердиев, С. А. Меджидова, Н. Ю. Литвинов //

Геодезия и картография. – 2018. – №2 (932). – С. 17-21. DOI: 10.22389/0016-7126-2018-932-2-17-21.

129. Назаренко, В. Г. Уравновешивание триангуляции методом квадратичного программирования [Текст] / В. Г. Назаренко // Инженерная геодезия. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. – 1966. – №3. – С. 41-49.

130. Назаренко, В. Г. О решении задач геодезического уравновешивания методом квадратичного программирования [Текст] / В. Г. Назаренко // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1967. – №3. – С. 21-24.

131. Назаренко, В. Г. Математическое программирование в уравнительных вычислениях [Текст] / В. Г. Назаренко // Инженерная геодезия. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. – 1968. – №4. – С. 134-139.

132. Нестеров, Ю. Е. Методы выпуклой оптимизации [Текст] / Ю. Е. Нестеров. – М.: Издательство МЦНМО, 2010. – 281 с.

133. Определение крена дымовых труб и проверка вертикальности сооружений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.estateline.ru/articles/2566/> (дата обращения 29.11.2018).

134. Павлов, В. И. Фотограмметрия. Теория одиночного снимка и стереоскопической пары снимков [Текст]: Учеб. пособие / В. И. Павлов. – 2-е изд., пер. и доп. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет), 2006. – 175 с. – ISBN 5-94211-175-8.

135. Падве, В. А. Потенциал универсального синтезированного алгоритма МНК-оптимизации геодезических данных [Текст] / В. А. Падве // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2011. – № 2. – С. 34-42.

136. Пандул, И. С. Исторические и философские аспекты геодезии и маркшейдерии [Текст] / И. С. Пандул, В. В. Зверевич. – СПб.: Политехника, 2008. – 333 с.: ил. – ISBN 978-5-7325-0884-0.

137. Пандул, И. С. Развитие геодезии с древнейших времён до наших дней [Текст] / И. С. Пандул, Б. Я. Пукшанский // Маркшейдерский вестник. – 2008. – №5. – С. 13-16.

138. Пандул, И. С. Инженерная геодезия и фотограмметрия [Текст]: Сборник задач / Б. Н. Дьяков, А. В. Зубов, В. И. Павлов, И. С. Пандул, В. Г. Потюхляев. – 2-е. изд., стереотипное. – СПб.: Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2014. – 61 с. – ISBN 978-5-94211-705-4.

139. Парамзин, А. В. Разработка и исследование методов представления и уточнения параметров геопотенциала: дис. ... кан. техн. наук: 05.24.01 / Алексей Валентинович Парамзин. – М., 1984. – 144 с.

140. Поколения компьютеров – история развития вычислительной техники [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://infl.info/computergeneration> (дата обращения 18.10.2019).

141. Программное обеспечение SpatialAnalyzer [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.promgeo.com/software/sa/> (дата обращения 11.01.2020).

142. Программное обеспечение SpatialAnalyzer [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.hexagonmi.com/ru-ru/products/software/spatialanalyzer> (дата обращения 11.01.2020).

143. Прогресс процессоров Intel за последние 10 лет [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.iguides.ru/blogs/All_About_Computers/back-to-the-future-the-progress-of-intel-processors-over-the-last-10-y/ (дата обращения 18.10.2019).

144. Руководство по определению кренов инженерных сооружений башенного типа геодезическими методами. – М.: Стройиздат, 1981. – 56 с.

145. Рыбников, К. А. История математики [Текст] / К. А. Рыбников. – М.: Издательство МГУ, 1960. – Т. 1. – 190 с.

146. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2019666740 Российская Федерация. Определение кренов сооружений башенного

типа: №2019665987; заявл. 05.12.19; опубл. 13.12.2019, Бюл. №12 / Зубов А. В., Елисеева Н. Н. // заявитель Санкт-Петербургский горный университет. – 1 с.

147. Селютин, А. Д. Аппроксимация полиномов n степени методом наименьших квадратов [Текст] / А. Д. Селютин // Молодой учёный. – 2018. – №16 (202). – С. 91-95. – ISSN 2072-0297.

148. Середович, В. А. Наземное лазерное сканирование [Текст]: Монография / В. А. Середович, А. В. Комиссаров, Д. В. Комиссаров, Т. А. Широкова. – Новосибирск: СГГА, 2009. – 261 с. – ISBN 978-5-87693-336-2.

149. Середович, В. А. Определение крена и деформаций дымовых труб средствами наземного лазерного сканирования [Текст] / В. А. Середович, А. В. Иванов, А. В. Середович, А. В. Усикова, А. П. Манеева // Интерэкспо ГЕО-Сибирь. – 2010. – Т. 1. – №3. – С. 75-78.

150. Синявская, М. Л. Разработка научно-методических основ технологического развития геодезии: дис. ... кан. техн. наук: 25.00.32 / Мария Леонидовна Синявская. – Новосибирск, 2018. – 123 с.

151. Соловьёв, И. В. Геодезия и прикладная информатика [Текст] / И. В. Соловьёв // Вестник МГТУ МИРЭА. – 2014. – №2. – С. 126-144.

152. Струченков, В. И. Методы оптимизации в прикладных задачах [Текст] / В. И. Струченко. – М: Директ-Медиа, 2015. – 434 с. – ISBN 978-5-4475-3800-2.

153. Таблица быстродействия процессоров [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.chaynikam.info/cpu_table.html?td1=passmark&td3=lithography (дата обращения 18.10.2019).

154. Таненбаум, Э. Современные операционные системы [Текст] / Э. Таненбаум, Х. Бос. – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2019. – 1120 с.: ил. – ISBN 978-5-4461-1155-8.

155. Тараничев, Н. А. Применение способа Ньютона для обработки результатов геодезических измерений [Текст] / Н. А. Тараничев // Геодезия и картография. – 1964. – №4. – С. 22-27.

156. Таранов, В. С. Оптимизация параметров эллиптических орбит спутниковой системы [Текст] / В. С. Таранов // Материалы национальной научно-

практической конференции «Актуальные проблемы науки и техники». – 2018. – С. 368-369.

157. Тесты CPU. PassMark Software [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.cpubenchmark.net/> (дата обращения 18.10.2019).

158. Тетерин, Г. Н. Определение оптимальных высот геодезических знаков с помощью динамического программирования [Текст] / Г. Н. Тетерин // Труды Новосибирского института инженеров геодезии, аэрофотосъёмки и картографии. – 1972. – №27. – С. 91-96.

159. Тимов, Х. И. Приложение теории выпуклого программирования для уравнивания условных и посредственных измерений [Текст] / Х. И. Тимов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1968. – №1. – С. 49-50.

160. Турчак, Л. И. Основы численных методов [Текст]: Учеб. пособие / Л. И. Турчак. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с.

161. Угаров, С. Г. Оптимизация построения фотограмметрических сетей с использованием элементов внешнего ориентирования фотоснимков, определенных при помощи стандартного геодезического GPS-оборудования [Текст] / С. Г. Угаров, С. А. Ефимов, А. А. Капралов // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия: География. – 2010. – Т. 23 (62). – №1. – С. 280-285.

162. Улыбышев, Ю. П. Обзор методов оптимизации траекторий космических аппаратов с использованием дискретных множеств псевдоимпульсов [Текст] / Ю. П. Улыбышев // Космическая техника и технологии. – 2016. – №4 (15). – С. 67-79.

163. Улыбышев, Ю. П. Оптимизация траекторий космических аппаратов для мягкой посадки на Луну [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://readings.gmik.ru/lecture/2007-OPTIMIZATSIYA-TRAEKTORIY-KOSMICHESKIH-APPARATOV-DLYA-MYAGKOY-POSADKI-NA-LUNU> (дата обращения 14.07.2019).

164. Фогель, Л. Искусственный интеллект и эволюционное моделирование [Текст] / Л. Фогель, А. Оуэнс, М. Уолш. – М.: Мир, 1969. – 230 с.

165. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование [Текст] / Д. Химмельблау; пер. с английского И. М. Быховской, Б. Т. Вавилова; под редакцией М. Л. Быховского. – М.: Мир, 1975. – 532 с.

166. Холоднов, В. А. Решение задач безусловной оптимизации с использованием системы компьютерной математики MathCAD [Текст]: Методические указания / В. А. Холоднов, В. А. Сиренек, В. Н. Чепикова, Е. С. Боровинская, В. М. Крылов. – СПб.: СПбГТИ (ТУ), 2009. – 47 с.

167. Целевая функция и её формы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://studfile.net/preview/3653064/page:6/> (дата обращения 28.02.2018).

168. Цибанов, В. В. Программа минимизации функции многих переменных методом деформируемого многогранника (по Нелдеру и Миду) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://tsibanoff.narod.ru/algorythms/algorythms.html> (дата обращения 28.02.2018).

169. Чабан, Л. Н. Методы и алгоритмы распознавания образов в автоматизированном дешифрировании данных дистанционного зондирования [Текст]: Учеб. пособие / Л. Н. Чабан. – М.: МИИГАиК, 2016. – 94 с.

170. Черноусько, Ф. Л. Динамическое программирование [Текст] / Ф. Л. Черноусько // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №2. – С. 139-144.

171. Шац, В. Н. Стохастический метод решения задач классификации и обучения [Текст] / В. Н. Шац // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2011. – Т. 7. – №1. – С. 257-268.

172. Шевченко, Г. Г. Использование поисковых методов для уравнивания и оценки точности элементарных геодезических построений [Текст] / Г. Г. Шевченко // Геодезия и картография. – 2019. – Т. 80. – №10. – С. 10-20. DOI: 10.22389/0016-7126-2019-952-10-10-20.

173. Шеховцов, Г. А. Контроль пространственного положения и формы высоких сооружений башенного типа [Текст]: Монография / Г. А. Шеховцов. – Нижний Новгород: ННГАСУ, 2018. – 214 с. – ISBN 978-5-528-00265-1.

174. Шнитко, С. Г. Алгоритмы уравнивания и оценки точности геодезических сетей нелинейными методами [Текст] / С. Г. Шнитко // Вестник ПГУ. Серия Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2012. – №8. – С. 133-135. – ISSN 2070-1683.

175. Эволюционные вычисления и генетические алгоритмы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://sites.google.com/site/anisimovkhv/learning/iis/lecture/tema15#p151> (дата обращения 15.02.2019).

176. Эволюционное программирование [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://birga-trade.com/zhizhilev62.html> (дата обращения 17.02.2019).

177. Эволюционный алгоритм (Evolutionary algorithm) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://wiki.loginom.ru/articles/evolution-algorithm.html> (дата обращения 15.02.2019).

178. Eliseeva, N. N. The application of search methods for solving optimization problems in geodesy / N.N. Eliseeva, A. V. Zubov // Journal of Mining and Geological Sciences. 62nd International Scientific Conference. – 2019. – Vol. 62. – №3. – Pp. 82-85.

179. Eliseeva, N. N. The application of search methods for solving optimization problems in geodesy / N. N. Eliseeva, A. V. Zubov // Scientific conference abstracts. The XV International Forum-Contest of Students and Young Researchers «Topical Issues of Rational Use of Natural Resources 2019». – 2019. – P. 238.

180. Eliseeva, N. N. The application of search methods for solving optimization problems / N. N. Eliseeva, A. V. Zubov // Topical Issues of Rational Use of Natural Resources. – CRC Press. – 2019. – Vol. 1. – Pp. 346-352. DOI: 10.1201/9781003014577-43.

181. Eliseeva, N. N. Application of an evolutionary algorithm to a software suite for determining degrees of tilt in cylindrical structures based on terrestrial laser scanning data / N. N. Eliseeva, A. V. Zubov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – IOP Publishing. – 2019. – Vol. 698. – №.1. – Pp. 1-7. DOI: 10.1088/1757-899X/698/4/044013.

182. Fogel, L. J. Biotechnology: concepts and applications / L. J. Fogel. – Whitefish: LLC, 2012. – 842 p.

183. Holland, J. H. Adaptation in natural and artificial system: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence (complex adaptive systems) / J. H. Holland. – Boston: The MIT Press, 1992. – 2nd edn. – 228 p.

184. IEEE 754 – стандарт двоичной арифметики с плавающей точкой [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.softelectro.ru/ieee754.html> (дата обращения 04.11.2019).

185. Koza, J. R. Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection / J. R. Koza. – Cambridge: The MIT Press, 1992. – 840 p.

186. PassMark Software [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.cpubenchmark.net/> (дата обращения 18.10.2019).

187. Rechenberg, I. Evolutionstrategie: optimierung technischer systeme nach prinzipien der biologischen evolution / I. Rechenberg. – Stuttgart: Fromman-Holzboog, 1973. – 2nd edn. – 170 p.

188. Schwefel, H. P. Numerische optimierung von computer-modellen mittels der evolutionsstrategie / H. P. Schwefel. – Basel: Birkhaeuser, 1977. – 398 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Сравнение алгоритмов классических строгих методов (коррелятного и параметрического) и общего алгоритма поисковых методов



ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Пиковая производительность двойной точности процессоров персональных компьютеров 4-го и 5-го поколений

Процессор	Год	Производительность, флопс в секунду
Zilog Z80 + математический сопроцессор AMD Am9512, 3 МГц	1977-1980	1-2 кфлопс/с
Intel 80486DX/DX2	1990-1992	до 30-50 Мфлопс/с
Intel Pentium 75-200	1996	75-200 Мфлопс/с
Intel Pentium III 450-1133 МГц	1999-2000	до 450-1113 Мфлопс/с
Intel Pentium III-S (2001) 1-1,4 ГГц	2001	до 1-1,4 Гфлопс/с
Intel Pentium 4 2,5-2,8 ГГц	2004	до 5-5,6 Гфлопс/с
AMD Athlon 64 X2 4200+ 2,2 ГГц, 2 ядра	2006	8,8 Гфлопс/с
Intel Core 2 Duo E6600 2,4 ГГц, 2 ядра	2006	19,2 Гфлопс/с
МЦСТ Эльбрус 2000 300 МГц	2008	2,4 Гфлопс/с
Intel Core 2 Quad Q8300 2,5 ГГц, 4 ядра	2008	40 Гфлопс/с
Intel Atom N270, D150 1,6 ГГц	2008-2009	до 3,2 Гфлопс/с
Intel Core i7-975 XE (Nehalem) 3,33 ГГц, 4 ядра	2009	53,3 Гфлопс/с
AMD Phenom II X4 965 BE 3,4 ГГц, 4 ядра	2009	54,4 Гфлопс/с
AMD Athlon II X4 640 3,0 ГГц, 4 ядра	2010	48 Гфлопс/с
AMD Phenom II X6 1100T 3,3 ГГц, 6 ядер	2010	79,2 Гфлопс/с
МЦСТ Эльбрус-2С+ 500 МГц, 2 ядра	2011	8 Гфлопс/с
Intel Core i3-2350M 2,3 ГГц, 2 ядра	2011	36,8 Гфлопс/с
Intel Core i5-2500K (Sandy Bridge), 3,3 ГГц, 4 ядра	2011	105,6 Гфлопс/с
AMD FX-8350 4 ГГц, 8 ядер	2012	128 Гфлопс/с
Intel Core i7-4930K (Ivy Bridge), 3,4 ГГц, 6 ядер	2013	163 Гфлопс/с
IBM Power8 4,4 ГГц, 12 ядер	2013	290 Гфлопс/с
МЦСТ Эльбрус-4С (1891ВМ8Я, Эльбрус v.3) 800 МГц, 4 ядра	2014	25 Гфлопс/с
Intel Core i7-5960X (Extreme Edition Haswell-E), 3,0 ГГц, 8 ядер	2014	384 Гфлопс/с
МЦСТ Эльбрус-8С (Эльбрус v.4) 1,3 ГГц, 8 ядер	2016	125 Гфлопс/с
Loongson-3B1500 (MIPS64), 1,5 ГГц, 8 ядер	2016	до 192 Гфлопс/с
AMD Ryzen 7 1700X (Zen), 3,4 ГГц, 8 ядер	2017	217 Гфлопс/с
Intel Core i9-9900k (Coffee Lake), 3,6 ГГц, 8 ядер	2018	460 Гфлопс/с
AMD Ryzen 7 3700X (Zen 2), 3,6 ГГц, 8 ядер	2019	460 Гфлопс
AMD Ryzen 9 3950X (Zen 2), 3,5 ГГц, 16 ядер	2019	896 Гфлопс/с
МЦСТ Эльбрус-8СВ (Эльбрус v.5) 1,5 ГГц, 8 ядер	2020 (план)	288 Гфлопс/с
МЦСТ Эльбрус-12С 2 ГГц, 12 ядер	2020 (план)	576 Гфлопс/с
МЦСТ Эльбрус-16С 2 ГГц, 16 ядер.	2021 (план)	750 Гфлопс/с

ПРИЛОЖЕНИЕ В**Плановые координаты точек на окружности**

№ точки	Координаты x_i, м	Координаты y_i, м
1	15.000	10.000
2	14.956	10.837
3	14.807	11.428
4	14.568	12.044
5	14.285	12.567
6	13.818	13.204
7	13.004	13.967
8	12.379	14.398
9	11.426	14.798
10	10.442	14.974
11	9.503	14.990
12	9.021	14.888
13	8.676	14.795
14	8.129	14.664
15	7.591	14.381
16	7.240	14.177
17	6.688	13.746
18	6.117	13.161
19	5.733	12.596
20	5.357	11.842
21	5.111	10.974
22	4.985	9.998
23	5.063	9.208
24	5.243	8.546
25	5.440	7.886
26	5.648	7.568
27	5.930	7.070
28	6.729	6.226
29	7.743	5.538
30	8.866	5.125
31	10.000	5.005
32	11.196	5.131
33	12.106	5.459
34	12.841	5.894
35	13.321	6.262
36	13.944	6.969
37	14.513	7.835
38	14.884	8.823

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Плановые координаты точек на окружности

Таблица Г – Плановые координаты точек на окружности

№ точки	Координаты x_i , м	Координаты y_i , м
1	11.081	10.163
2	11.119	10.271
3	11.096	10.394
4	11.037	10.539
5	10.968	10.551
6	10.895	10.686
7	10.855	10.818
8	10.743	10.852
9	10.663	10.955
10	10.483	11.062
11	10.378	11.109
12	10.216	11.174
13	10.110	11.158
14	9.912	11.158
15	9.763	11.147
16	9.674	11.071
17	9.582	11.094
18	9.502	11.028
19	9.391	10.982
20	9.323	10.862
21	9.185	10.797
22	9.146	10.736
23	9.124	10.638
24	9.068	10.535
25	9.012	10.345
26	8.952	10.286
27	8.935	10.136
28	8.981	10.049
29	8.950	9.948
30	8.965	9.842
31	9.000	9.718
32	9.042	9.671
33	9.100	9.546
34	9.164	9.421
35	9.280	9.312
36	9.343	9.284

Продолжение таблицы Г

37	9.460	9.168
38	9.502	9.165
39	9.683	9.072
40	9.750	9.047
41	9.834	9.018
42	9.928	9.038
43	10.059	9.010
44	10.134	9.016
45	10.235	9.025
46	10.359	9.066
47	10.455	9.100
48	10.562	9.154
49	10.685	9.198
50	10.698	9.273
51	10.739	9.306
52	10.832	9.367
53	10.915	9.434
54	10.943	9.533
55	11.016	9.610
56	11.023	9.677
57	11.075	9.724
58	11.066	9.856
59	11.113	9.905
60	11.133	10.063

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Результаты решения задачи аппроксимации результатов обмеров окружностью методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров

а) Начальные значения параметров заданы далёкими от истинных.

Аппроксимация окружностью

Исходные данные
Имя файла: d:\okr.txt

Начальные значения параметров: X: 15 м, Y: 15 м, R: 2 м
Начальные шаги изменения параметров: X: 2 м, Y: 2 м, R: 0,5 м

Решение
Конечные значения параметров: X: 10,032 м, Y: 10,089 м, R: 1,079 м
Минимальное значение целевой функции: 0,070034

Всего точек: 60

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Начальное значение целевой функции	Конечное значение целевой функции		Итерационный процесс				
2	1570,634180	0,070034		Номер итерации	X, м	Y, м	R, м	Значение целевой функции
3				1	10,802	11,896	2,178	36,139243
4				2	9,997	11,367	1,587	93,206573
5				3	10,111	10,442	1,132	48,842016
6				4	10,057	10,067	1,077	11,157586
7				5	10,049	10,039	1,076	7,155972
8				6	10,046	10,042	1,076	5,868359
9				7	10,043	10,052	1,077	4,828054
10				8	10,040	10,065	1,077	3,968776
11				9	10,037	10,072	1,078	3,282495
12				10	10,035	10,076	1,078	2,717772
13				11	10,034	10,078	1,078	2,249754
14				12	10,034	10,080	1,078	1,862888
15				13	10,033	10,082	1,078	1,543069
16				14	10,033	10,083	1,078	1,278939
17				15	10,033	10,084	1,079	1,060404
18				16	10,032	10,085	1,079	0,880066
19				17	10,032	10,086	1,079	0,730887
20				18	10,032	10,086	1,079	0,607714
21				19	10,032	10,087	1,079	0,505783
22				20	10,032	10,087	1,079	0,421620
23				21	10,032	10,087	1,079	0,352075
24				22	10,032	10,088	1,079	0,294550
25				23	10,032	10,088	1,079	0,247116
26				24	10,032	10,088	1,079	0,207780
27				25	10,032	10,088	1,079	0,175312
28				26	10,032	10,088	1,079	0,148519
29				27	10,032	10,088	1,079	0,126343
30				28	10,032	10,089	1,079	0,108016
31				29	10,032	10,089	1,079	0,092899
32				30	10,032	10,089	1,079	0,080355
33				31	10,032	10,089	1,079	0,070034

б) Начальные значения параметров заданы ближе к истинным.

Аппроксимация окружностью

Исходные данные

Имя файла: d:\okr.txt

Начальные значения параметров

X: 9 м

Y: 9 м

R: 1,5 м

Начальные шаги изменения параметров

X: 0,5 м

Y: 0,5 м

R: 0,2 м

Рассчитать

Решение

Конечные значения параметров

X: 10,032 м

Y: 10,089 м

R: 1,079 м

Минимальное значение целевой функции: 0,056988

Всего точек: 60

OK

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Начальное значение целевой функции	Конечное значение целевой функции		Итерационный процесс				
2	31,594679	0,056988		Номер итерации	X, м	Y, м	R, м	Значение целевой функции
3				1	9,409	9,985	1,179	27,517760
4				2	10,129	10,105	1,080	5,028343
5				3	10,034	10,087	1,079	1,690127
6				4	10,032	10,087	1,079	1,375027
7				5	10,032	10,087	1,079	1,140047
8				6	10,032	10,087	1,079	0,945853
9				7	10,032	10,088	1,079	0,785266
10				8	10,032	10,088	1,079	0,652638
11				9	10,032	10,088	1,079	0,542956
12				10	10,032	10,088	1,079	0,452312
13				11	10,032	10,088	1,079	0,377464
14				12	10,032	10,088	1,079	0,315551
15				13	10,032	10,088	1,079	0,264385
16				14	10,032	10,089	1,079	0,222100
17				15	10,032	10,089	1,079	0,187153
18				16	10,032	10,089	1,079	0,158349
19				17	10,032	10,089	1,079	0,134405
20				18	10,032	10,089	1,079	0,114681
21				19	10,032	10,089	1,079	0,098407
22				20	10,032	10,089	1,079	0,084933
23				21	10,032	10,089	1,079	0,073797
24				22	10,032	10,089	1,079	0,064572
25				23	10,032	10,089	1,079	0,056988

в) Начальные значения параметров заданы очень близко к истинным.

Аппроксимация окружностью

Исходные данные
Имя файла: d:\okr.txt

Начальные значения параметров
X: 10 м
Y: 10 м
R: 1 м

Начальные шаги изменения параметров
X: 0,05 м
Y: 0,05 м
R: 0,02 м

Решение
Конечные значения параметров
X: 10,032 м
Y: 10,089 м
R: 1,079 м

Минимальное значение целевой функции: 0,034316

Всего точек: 60

Рассчитать

OK

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Начальное значение целевой функции	Конечное значение целевой функции		Итерационный процесс				
2	0,618669	0,034316		Номер итерации	X, м	Y, м	R, м	Значение целевой функции
3				1	10,031	10,080	1,078	0,226859
4				2	10,031	10,089	1,079	0,039390
5				3	10,032	10,089	1,079	0,037167
6				4	10,032	10,089	1,079	0,034316

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Результаты решения задачи аппроксимации результатов обмеров окружностью в программе Mathcad с помощью функции Minimize при разных вариантах задания начальных значений параметров

Mathcad - [1 - Таб. 6 - Окружность (параметры заданы грубо)]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Мой веб-узел Go

Начальные значения параметров

X := 15
Y := 15
R := 2

Начальные значения параметров заданы далёкими от истинных

Плановые координаты точек на окружности

11.081	10.163
11.119	10.271
11.096	10.394
11.037	10.539
10.968	10.551
10.895	10.686
10.855	10.818
10.743	10.852
10.663	10.955
10.483	11.062
10.378	11.109
10.216	11.174
10.110	11.158
9.912	11.158
9.763	11.147
9.674	11.071
9.582	11.094
9.502	11.028
9.391	10.982
9.323	10.862
9.185	10.797
9.146	10.736
9.124	10.638

	9.068	10.535
	9.012	10.345
	8.952	10.286
	8.935	10.136
	8.981	10.049
	8.950	9.948
	8.965	9.842
xy :=	9.000	9.718
	9.042	9.671
	9.100	9.546
	9.164	9.421
	9.280	9.312
	9.343	9.284
	9.460	9.168
	9.502	9.165
	9.683	9.072
	9.750	9.047
	9.834	9.018
	9.928	9.038
	10.059	9.010
	10.134	9.016
	10.235	9.025
	10.359	9.066
	10.455	9.100
	10.562	9.154
	10.685	9.198
	10.698	9.273
	10.739	9.306
	10.832	9.367
	10.915	9.434
	10.943	9.533
	11.016	9.610
	11.023	9.677
	11.075	9.724
	11.066	9.856
	11.113	9.905
	11.133	10.063

Целевая функция

$$f(X, Y, R) := \sum_{i=0}^{59} \left[\sqrt{(xy_{i,0} - X)^2 + (xy_{i,1} - Y)^2} - R \right]^2$$

i := 0..59

$\underline{F}_0 := \text{Minimize}(f, X, Y, R)$

Конечные значения параметров

$$F = \begin{pmatrix} 10.032 \\ 10.089 \\ 1.079 \end{pmatrix}$$

Mathcad - [2- Таб. 6 - Окружность (параметры заданы ближе)]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Начальные значения параметров

X := 9
 Y := 9
 R := 1.5

Начальные значения параметров заданы ближе к истинным

Целевая функция

$$f(X, Y, R) := \sum_{i=0}^{59} \left[\sqrt{(xy_{i,0} - X)^2 + (xy_{i,1} - Y)^2} - R \right]^2$$

i := 0..59

F := Minimize(f, X, Y, R)

Конечные значения параметров

$$F = \begin{pmatrix} 10.032 \\ 10.089 \\ 1.079 \end{pmatrix}$$

Mathcad - [3 - Таб. 6 - Окружность (параметры заданы точно)]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Начальные значения параметров

X := 10
 Y := 10
 R := 1

Начальные значения параметров заданы очень близко к истинным

Целевая функция

$$f(X, Y, R) := \sum_{i=0}^{59} \left[\sqrt{(xy_{i,0} - X)^2 + (xy_{i,1} - Y)^2} - R \right]^2$$

i := 0..59

F := Minimize(f, X, Y, R)

Конечные значения параметров

$$F = \begin{pmatrix} 10.032 \\ 10.089 \\ 1.079 \end{pmatrix}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Результаты решения комбинированной засечки методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров

а) Начальные значения параметров заданы далёкими от истинных.

Комбинированная засечка X

Исходные данные

Имя файла

Начальные значения параметров Начальные шаги изменения параметров

X м м

Y м м

Решение

Конечные значения параметров Минимальное значение целевой функции

X м

Y м

	A	B	C	D	E	F	G
1	Начальное значение целевой функции	Конечное значение целевой функции		Итерационный процесс			
2	7463973,554198	0,784537		Номер итерации	X, м	Y, м	Значение целевой функции
3				1	139473,33	157042,74	3119737,032543
4				2	139986,34	157477,71	385247,842991
5				3	140203,97	158790,62	148686,932841
6				4	140407,08	157031,15	495623,109470
7				5	140388,10	157134,15	3812,485457
8				6	140355,17	157139,46	635,414243
9				7	140355,11	157139,43	514,922401
10				8	140355,06	157139,43	425,555703
11				9	140355,03	157139,42	351,989829
12				10	140355,00	157139,42	291,141298
13				11	140354,98	157139,42	240,811661
14				12	140354,85	157139,41	199,182515
15				13	140354,85	157139,41	164,749806
16				14	140354,85	157139,40	136,269484
17				15	140354,80	157139,40	112,712559
18				16	140354,80	157139,39	93,227923
19				17	140354,74	157139,39	77,175433
20				18	140354,68	157139,39	63,886948
21				19	140354,64	157139,39	52,886546
22				20	140354,64	157139,39	43,780253
23				21	140354,62	157139,38	36,241932
24				22	140354,62	157139,38	30,001599
25				23	140354,62	157139,38	24,835761
26				24	140354,62	157139,38	20,559405
27				25	140354,62	157139,37	17,019375
28				26	140354,62	157139,37	14,088886
29				27	140354,63	157139,37	11,672648

30				28	140354,63	157139,37	9,670794
31				29	140354,63	157139,37	8,012257
32				30	140354,64	157139,37	6,643662
33				31	140354,63	157139,37	5,508841
34				32	140354,63	157139,37	4,567862
35				33	140354,63	157139,37	3,787613
36				34	140354,63	157139,37	3,140641
37				35	140354,63	157139,37	2,604180
38				36	140354,63	157139,37	2,159353
39				37	140354,63	157139,37	1,790509
40				38	140354,63	157139,37	1,484667
41				39	140354,63	157139,37	1,231067
42				40	140354,63	157139,37	1,020785
43				41	140354,63	157139,37	0,850655
44				42	140354,63	157139,37	0,839874
45				43	140354,63	157139,37	0,810034
46				44	140354,63	157139,37	0,807794
47				45	140354,63	157139,37	0,799088
48				46	140354,63	157139,37	0,798321
49				47	140354,63	157139,37	0,795503
50				48	140354,63	157139,37	0,789650
51				49	140354,63	157139,37	0,784537

б) Начальные значения параметров заданы ближе к истинным.

Комбинированная засечка

Исходные данные

Имя файла: d:\kz.txt

Начальные значения параметров: X: 140000 м, Y: 157000 м

Начальные шаги изменения параметров: X: 10 м, Y: 10 м

Рассчитать

Решение

Конечные значения параметров: X: 140354,63 м, Y: 157139,37 м

Минимальное значение целевой функции: 0,593316

	A	B	C	D	E	F	G
1	Начальное значение целевой функции	Конечное значение целевой функции		Итерационный процесс			
2	19936,325188	0,593316		Номер итерации	X, м	Y, м	Значение целевой функции
3				1	140217,50	157097,18	7427,204489
4				2	140304,87	157083,15	32,292193
5				3	140355,76	157138,22	29,098875
6				4	140355,76	157138,94	26,103064
7				5	140355,71	157139,17	25,751009
8				6	140355,63	157139,24	25,809660
9				7	140354,60	157139,31	24,840149
10				8	140354,56	157139,34	19,750195
11				9	140354,60	157139,34	18,508143
12				10	140354,60	157139,35	16,097614
13				11	140354,60	157139,35	15,549811
14				12	140354,60	157139,35	13,667181
15				13	140354,61	157139,35	11,132690
16				14	140354,61	157139,35	10,990655
17				15	140354,61	157139,36	9,764409
18				16	140354,62	157139,36	5,520674
19				17	140354,62	157139,36	4,537781
20				18	140354,62	157139,36	2,914100
21				19	140354,62	157139,37	0,984918
22				20	140354,62	157139,37	0,978651
23				21	140354,62	157139,37	0,976589
24				22	140354,63	157139,37	0,970091
25				23	140354,63	157139,37	0,699977
26				24	140354,63	157139,37	0,698811
27				25	140354,63	157139,37	0,689324
28				26	140354,63	157139,37	0,687098
29				27	140354,63	157139,37	0,679133
30				28	140354,63	157139,37	0,652832
31				29	140354,63	157139,37	0,656589
32				30	140354,63	157139,37	0,638901
33				31	140354,63	157139,37	0,638077
34				32	140354,63	157139,37	0,634415
35				33	140354,63	157139,37	0,633878
36				34	140354,63	157139,37	0,612094
37				35	140354,63	157139,37	0,600699
38				36	140354,63	157139,37	0,593718
39				37	140354,63	157139,37	0,593654
40				38	140354,63	157139,37	0,593316

в) Начальные значения параметров заданы очень близко к истинным.

Комбинированная засечка

Исходные данные

Имя файла

Начальные значения параметров

X м

Y м

Начальные шаги изменения параметров

м

м

Решение

Конечные значения параметров

X м

Y м

Минимальное значение целевой функции

	A	B	C	D	E	F	G
1	Начальное значение целевой функции	Конечное значение целевой функции		Итерационный процесс			
2	0,416169	0,285159		Номер итерации	X, м	Y, м	Значение целевой функции
3				1	140354,54	157139,29	0,296325
4				2	140354,60	157139,35	0,296303
5				3	140354,62	157139,36	0,296214
6				4	140354,62	157139,37	0,295976
7				5	140354,63	157139,37	0,294871
8				6	140354,63	157139,37	0,292210
9				7	140354,63	157139,37	0,292093
10				8	140354,63	157139,37	0,291743
11				9	140354,63	157139,37	0,291684
12				10	140354,63	157139,37	0,291098
13				11	140354,63	157139,37	0,290975
14				12	140354,63	157139,37	0,290937
15				13	140354,63	157139,37	0,289442
16				14	140354,63	157139,37	0,289130
17				15	140354,63	157139,37	0,289076
18				16	140354,63	157139,37	0,289008
19				17	140354,63	157139,37	0,288056
20				18	140354,63	157139,37	0,287102
21				19	140354,63	157139,37	0,287096
22				20	140354,63	157139,37	0,286140
23				21	140354,63	157139,37	0,285854
24				22	140354,63	157139,37	0,285159

ПРИЛОЖЕНИЕ И

Результаты решения комбинированной засечки в программе Mathcad с помощью функции Minimize при разных вариантах задания начальных значений параметров

Mathcad - [4 - Таб. 8 - Комбинированная засечка (параметры заданы грубо)]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Мой веб-узел Go

Начальные значения параметров

$X := 139000$ **Начальные значения параметров заданы далёкими от истинных**
 $Y := 156000$

Координаты пунктов

$x_A := 143848.77$ $y_A := 158887.01$
 $x_B := 142390.08$ $y_B := 155144.34$
 $x_C := 137205.94$ $y_C := 154723.49$

Измеренные углы

$\beta_{1r} := 32$ $\beta_{2r} := 70$
 $\beta_{1m} := 51$ $\beta_{2m} := 59$
 $\beta_{1c} := 24$ $\beta_{2c} := 53$

$\beta_1 := \left[\beta_{1r} + \left(\frac{\beta_{1m}}{60} \right) + \left(\frac{\beta_{1c}}{3600} \right) \right] \cdot \frac{\pi}{180} = 0.573$
 $\beta_2 := \left[\beta_{2r} + \left(\frac{\beta_{2m}}{60} \right) + \left(\frac{\beta_{2c}}{3600} \right) \right] \cdot \frac{\pi}{180} = 1.239$

Целевая функция

$$f(X, Y) := \left[\operatorname{atan} \left[\frac{(Y - y_C)}{(X - x_C)} \right] - \operatorname{atan} \left[\frac{(y_B - y_C)}{(x_B - x_C)} \right] - \beta_1 \right]^2 + \left[\operatorname{atan} \left[\frac{(y_A - Y)}{(x_A - X)} \right] - \operatorname{atan} \left[\frac{(y_B - Y)}{(x_B - X)} \right] - \beta_2 \right]^2$$

$F_{min} := \operatorname{Minimize}(f, X, Y)$

Конечные значения параметров

$$F = \begin{pmatrix} 140354.63 \\ 157139.37 \end{pmatrix}$$

Mathcad - [5 - Таб. 8 - Комбинированная засечка (параметры заданы ближе)]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Начальные значения параметров

X := 140000 **Начальные значения параметров заданы ближе к истинным**

Y := 157000

Координаты пунктов

xA := 143848.77 yA := 158887.01

xB := 142390.08 yB := 155144.34

xC := 137205.94 yC := 154723.49

Измеренные углы

$\beta_{1r} := 32$ $\beta_{2r} := 70$

$\beta_{1m} := 51$ $\beta_{2m} := 59$

$\beta_{1c} := 24$ $\beta_{2c} := 53$

$\beta_1 := \left[\beta_{1r} + \left(\frac{\beta_{1m}}{60} \right) + \left(\frac{\beta_{1c}}{3600} \right) \right] \cdot \frac{\pi}{180} = 0.573$

$\beta_2 := \left[\beta_{2r} + \left(\frac{\beta_{2m}}{60} \right) + \left(\frac{\beta_{2c}}{3600} \right) \right] \cdot \frac{\pi}{180} = 1.239$

Целевая функция

$$f(X, Y) := \left[\operatorname{atan} \left[\frac{(Y - yC)}{(X - xC)} \right] - \operatorname{atan} \left[\frac{(yB - yC)}{(xB - xC)} \right] - \beta_1 \right]^2 + \left[\operatorname{atan} \left[\frac{(yA - Y)}{(xA - X)} \right] - \operatorname{atan} \left[\frac{(yB - Y)}{(xB - X)} \right] - \beta_2 \right]^2$$

$F_{\min} := \operatorname{Minimize}(f, X, Y)$

Конечные значения параметров

$F = \begin{pmatrix} 140354.63 \\ 157139.37 \end{pmatrix}$

Mathcad - [6 - Таб. 8 - Комбинированная засечка (параметры заданы точно)]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Начальные значения параметров

X := 140350 **Начальные значения параметров заданы очень близко к истинным**

Y := 157135

Координаты пунктов

xA := 143848.77 yA := 158887.01

xB := 142390.08 yB := 155144.34

xC := 137205.94 yC := 154723.49

Измеренные углы

$\beta_{1r} := 32$ $\beta_{2r} := 70$

$\beta_{1m} := 51$ $\beta_{2m} := 59$

$\beta_{1c} := 24$ $\beta_{2c} := 53$

$\beta_1 := \left[\beta_{1r} + \left(\frac{\beta_{1m}}{60} \right) + \left(\frac{\beta_{1c}}{3600} \right) \right] \cdot \frac{\pi}{180} = 0.573$

$\beta_2 := \left[\beta_{2r} + \left(\frac{\beta_{2m}}{60} \right) + \left(\frac{\beta_{2c}}{3600} \right) \right] \cdot \frac{\pi}{180} = 1.239$

Целевая функция

$$f(X, Y) := \left[\operatorname{atan} \left[\frac{(Y - yC)}{(X - xC)} \right] - \operatorname{atan} \left[\frac{(yB - yC)}{(xB - xC)} \right] - \beta_1 \right]^2 + \left[\operatorname{atan} \left[\frac{(yA - Y)}{(xA - X)} \right] - \operatorname{atan} \left[\frac{(yB - Y)}{(xB - X)} \right] - \beta_2 \right]^2$$

$F_{\min} := \operatorname{Minimize}(f, X, Y)$

Конечные значения параметров

$F = \begin{pmatrix} 140354.63 \\ 157139.37 \end{pmatrix}$

ПРИЛОЖЕНИЕ К

Результаты решения многократной линейной засечки методом парабол при разных вариантах задания начальных значений параметров

а) Начальные значения параметров заданы далёкими от истинных.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Начальное значение целевой функции	Конечное значение целевой функции		Итерационный процесс			
2	16288238,142724	0,896689		Номер итерации	X, м	Y, м	Значение целевой функции
3				1	1636,909	1157,597	6808039,661865
4				2	2149,830	1592,490	848722,086014
5				3	2367,443	2903,891	333167,750242
6				4	2136,726	1994,766	1316079,757547
7				5	2118,762	2096,949	10231,435523
8				6	2100,596	2100,323	1550,533410
9				7	2100,064	2100,386	1605,042681
10				8	2100,071	2100,381	1333,108625
11				9	2100,084	2100,375	1101,891958
12				10	2100,094	2100,371	910,716079
13				11	2100,103	2100,367	752,735510
14				12	2100,110	2100,364	622,174855
15				13	2100,116	2100,362	514,281787
16				14	2100,121	2100,360	425,117086
17				15	2100,125	2100,358	351,428111
18				16	2100,129	2100,356	290,534733
19				17	2100,132	2100,355	240,207043
20				18	2100,134	2100,354	198,618212
21				19	2100,136	2100,353	164,248755
22				20	2100,137	2100,353	135,842279
23				21	2100,139	2100,352	112,367824
24				22	2100,140	2100,352	92,967159
25				23	2100,141	2100,351	76,935175
26				24	2100,141	2100,351	63,684287
27				25	2100,142	2100,351	52,735267
28				26	2100,143	2100,351	43,684567
29				27	2100,143	2100,351	36,205912

30				28	2100,143	2100,350	30,025276
31				29	2100,144	2100,350	24,916322
32				30	2100,144	2100,350	20,695068
33				31	2100,144	2100,350	17,206520
34				32	2100,144	2100,350	14,322958
35				33	2100,144	2100,350	11,939779
36				34	2100,144	2100,350	9,970752
37				35	2100,145	2100,350	8,343578
38				36	2100,145	2100,350	6,998128
39				37	2100,145	2100,350	5,886589
40				38	2100,145	2100,350	4,967681
41				39	2100,145	2100,350	4,208471
42				40	2100,145	2100,350	3,581130
43				41	2100,145	2100,350	3,062642
44				42	2100,145	2100,350	2,634122
45				43	2100,145	2100,350	2,279750
46				44	2100,145	2100,350	1,987353
47				45	2100,145	2100,350	1,745121
48				46	2100,145	2100,350	1,545251
49				47	2100,145	2100,350	1,380046
50				48	2100,145	2100,350	1,243435
51				49	2100,145	2100,350	1,130688
52				50	2100,145	2100,350	1,037390
53				51	2100,145	2100,350	0,960297
54				52	2100,145	2100,350	0,896689

б) Начальные значения параметров заданы ближе к истинным.

Многократная линейная засечка

Исходные данные

Имя файла: d:\Lz.txt

Начальные значения параметров: X = 2000 м, Y = 2000 м

Начальные шаги изменения параметров: X = 10 м, Y = 10 м

Рассчитать

Решение

Конечные значения параметров: X = 2100,145 м, Y = 2100,35 м

Минимальное значение целевой функции: 0,624738

Всего точек: 4

OK

	A	B	C	D	E	F	G
1	Начальное значение целевой функции	Конечное значение целевой функции		Итерационный процесс			
2	43506,488727	0,624738		Номер итерации	X, м	Y, м	Значение целевой функции
3				1	2117,489	2097,180	16208,360874
4				2	2100,649	2100,287	73,522976
5				3	2100,146	2100,352	136,635483
6				4	2100,139	2100,352	114,784407
7				5	2100,140	2100,352	94,990592
8				6	2100,141	2100,352	78,607446
9				7	2100,141	2100,351	65,067618
10				8	2100,142	2100,351	53,877436
11				9	2100,143	2100,351	44,628676
12				10	2100,143	2100,351	36,985926
13				11	2100,143	2100,350	30,669595
14				12	2100,144	2100,350	25,449321
15				13	2100,144	2100,350	21,135996
16				14	2100,144	2100,350	17,569644
17				15	2100,144	2100,350	14,623793
18				16	2100,144	2100,350	12,188826
19				17	2100,144	2100,350	10,176399
20				18	2100,144	2100,350	8,512936
21				19	2100,145	2100,350	7,138261
22				20	2100,145	2100,350	6,002404
23				21	2100,145	2100,350	5,063962
24				22	2100,145	2100,350	4,287948
25				23	2100,145	2100,350	3,646511
26				24	2100,145	2100,350	3,116915
27				25	2100,145	2100,350	2,678527
28				26	2100,145	2100,350	2,316927
29				27	2100,145	2100,350	2,017604
30				28	2100,145	2100,350	1,770440
31				29	2100,145	2100,350	1,566173
32				30	2100,145	2100,350	1,397328
33				31	2100,145	2100,350	1,257784
34				32	2100,145	2100,350	1,142454
35				33	2100,145	2100,350	1,047172
36				34	2100,145	2100,350	0,968203
37				35	2100,145	2100,350	0,903239
38				36	2100,145	2100,350	0,849422
39				37	2100,145	2100,350	0,804948
40				38	2100,145	2100,350	0,768348
41				39	2100,145	2100,350	0,737891
42				40	2100,145	2100,350	0,712727
43				41	2100,145	2100,350	0,692104
44				42	2100,145	2100,350	0,674799
45				43	2100,145	2100,350	0,660727
46				44	2100,145	2100,350	0,649056
47				45	2100,145	2100,350	0,639342
48				46	2100,145	2100,350	0,631328
49				47	2100,145	2100,350	0,624738

в) Начальные значения параметров заданы очень близко к истинным.

Многократная линейная засечка

Исходные данные
Имя файла: d:\Lz.txt

Начальные значения параметров: X = 2100 м, Y = 2100 м
Начальные шаги изменения параметров: 0,5 м

Решение
Конечные значения параметров: X = 2100,145 м, Y = 2100,35 м
Минимальное значение целевой функции: 0,622288

Всего точек: 4

Рассчитать

OK

	A	B	C	D	E	F	G
1	Начальное значение целевой функции	Конечное значение целевой функции		Итерационный процесс			
2	0,908184	0,622288		Номер итерации	X, м	Y, м	Значение целевой функции
3				1	2100,190	2100,344	0,646655
4				2	2100,146	2100,350	1,000943
5				3	2100,145	2100,350	0,938547
6				4	2100,145	2100,350	0,878746
7				5	2100,145	2100,350	0,829102
8				6	2100,145	2100,350	0,788370
9				7	2100,145	2100,350	0,754438
10				8	2100,145	2100,350	0,726364
11				9	2100,145	2100,350	0,703411
12				10	2100,145	2100,350	0,684202
13				11	2100,145	2100,350	0,668494
14				12	2100,145	2100,350	0,655317
15				13	2100,145	2100,350	0,644681
16				14	2100,145	2100,350	0,635687
17				15	2100,145	2100,350	0,628314
18				16	2100,145	2100,350	0,622288

ПРИЛОЖЕНИЕ Л

Результаты решения многократной линейной засечки в программе Mathcad с помощью функции Minimize при разных вариантах задания начальных значений параметров

Mathcad - [7 - Таб. 10 - Линейная засечка (параметры заданы грубо)]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Мой веб-узел Go

Начальные значения параметров

$X := 0$ Начальные значения параметров заданы далёкими от истинных

$Y := 0$

Координаты пунктов

$$xy := \begin{pmatrix} 1000 & 1200 \\ 2100 & 1600 \\ 3500 & 2500 \\ 1100 & 3200 \end{pmatrix}$$

Измеренные расстояния

$$S_{ww} := \begin{pmatrix} 1421.797 \\ 500.694 \\ 1456.264 \\ 1486.902 \end{pmatrix}$$

Целевая функция

$$f(X, Y) := \sum_{i=0}^3 \left[\sqrt{(xy_{i,0} - X)^2 + (xy_{i,1} - Y)^2} - s_{i,0} \right]^2$$

$i := 0..3$

$F_{min} := \text{Minimize}(f, X, Y)$

Конечные значения параметров

$$F = \begin{pmatrix} 2100.176 \\ 2100.318 \end{pmatrix}$$

Mathcad - [7 - Таб. 10 - Линейная засечка (параметры заданы грубо)]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Мой веб-узел Go

Начальные значения параметров

$X := 2100.176$ **Переуравнивание**

$Y := 2100.344$

Координаты пунктов

$$xy := \begin{pmatrix} 1000 & 1200 \\ 2100 & 1600 \\ 3500 & 2500 \\ 1100 & 3200 \end{pmatrix}$$

Измеренные расстояния

$$S := \begin{pmatrix} 1421.797 \\ 500.694 \\ 1456.264 \\ 1486.902 \end{pmatrix}$$

Целевая функция

$$f(X, Y) := \sum_{i=0}^3 \left[\sqrt{(xy_{i,0} - X)^2 + (xy_{i,1} - Y)^2} - s_{i,0} \right]^2$$

$i := 0..3$

$F := \text{Minimize}(f, X, Y)$

Конечные значения параметров

$$F = \begin{pmatrix} 2100.145 \\ 2100.350 \end{pmatrix}$$

Mathcad - [8 - Таб. 10 - Линейная засечка (параметры заданы ближе)]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Мой веб-узел Go

Начальные значения параметров

X := 2000
 Y := 2000

Начальные значения параметров заданы ближе к истинным

Координаты пунктов

$$xy := \begin{pmatrix} 1000 & 1200 \\ 2100 & 1600 \\ 3500 & 2500 \\ 1100 & 3200 \end{pmatrix}$$

Измеренные расстояния

$$S := \begin{pmatrix} 1421.797 \\ 500.694 \\ 1456.264 \\ 1486.902 \end{pmatrix}$$

Целевая функция

$$f(X, Y) := \sum_{i=0}^3 \left[\sqrt{(xy_{i,0} - X)^2 + (xy_{i,1} - Y)^2} - s_{i,0} \right]^2$$

i := 0..3

$$F := \text{Minimize}(f, X, Y)$$

Конечные значения параметров

$$F = \begin{pmatrix} 2100.145 \\ 2100.350 \end{pmatrix}$$

Mathcad - [9 - Таб. 10 - Линейная засечка (параметры заданы точно)]

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Мой веб-узел Go

Начальные значения параметров

X := 2100
 Y := 2100

Начальные значения параметров заданы очень близко к истинным

Координаты пунктов

$$xy := \begin{pmatrix} 1000 & 1200 \\ 2100 & 1600 \\ 3500 & 2500 \\ 1100 & 3200 \end{pmatrix}$$

Измеренные расстояния

$$S := \begin{pmatrix} 1421.797 \\ 500.694 \\ 1456.264 \\ 1486.902 \end{pmatrix}$$

Целевая функция

$$f(X, Y) := \sum_{i=0}^3 \left[\sqrt{(xy_{i,0} - X)^2 + (xy_{i,1} - Y)^2} - s_{i,0} \right]^2$$

i := 0..3

$$F := \text{Minimize}(f, X, Y)$$

Конечные значения параметров

$$F = \begin{pmatrix} 2100.145 \\ 2100.350 \end{pmatrix}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ М

Результаты решения задачи аппроксимации результатов обмеров окружностью простым генетическим алгоритмом при разных вариантах задания начальных значений параметров

а) Начальные значения параметров заданы далёкими от истинных.

Исходные данные		Решение	
Имя файла	d:\okr.txt	Конечные значения параметров	
Начальные значения параметров		X	10,032 м
X	15 м	Y	10,089 м
Y	15 м	R	1,079 м
R	2 м	Начальное значение целевой функции	1570,6341801
Рассчитать		Минимальное значение целевой функции	0,0004091

б) Начальные значения параметров заданы ближе к истинным.

Исходные данные		Решение	
Имя файла	d:\okr.txt	Конечные значения параметров	
Начальные значения параметров		X	10,032 м
X	9 м	Y	10,089 м
Y	9 м	R	1,079 м
R	1,5 м	Начальное значение целевой функции	31,5946787
Рассчитать		Минимальное значение целевой функции	0,0003617

в) Начальные значения параметров заданы очень близко к истинным.

Исходные данные		Решение	
Имя файла	d:\okr.txt	Конечные значения параметров	
Начальные значения параметров		X	10,032 м
X	10 м	Y	10,089 м
Y	10 м	R	1,079 м
R	1 м	Начальное значение целевой функции	0,6186693
Рассчитать		Минимальное значение целевой функции	0,0003382

ПРИЛОЖЕНИЕ Н

Результаты решения комбинированной засечки простым генетическим алгоритмом

при разных вариантах задания начальных значений параметров

а) Начальные значения параметров заданы далёкими от истинных.

Комбинированная засечка	
Исходные данные	Решение
Имя файла: <input type="text" value="d:\Kz.txt"/>	
Начальные значения параметров	Конечные значения параметров
X: <input type="text" value="139000"/> м	X: <input type="text" value="140354,63"/> м
Y: <input type="text" value="156000"/> м	Y: <input type="text" value="157139,37"/> м
<input type="button" value="Рассчитать"/>	Начальное значение целевой функции
	<input type="text" value="7463973,554198"/>
	Минимальное значение целевой функции
	<input type="text" value="0,013178"/>

б) Начальные значения параметров заданы ближе к истинным.

Комбинированная засечка	
Исходные данные	Решение
Имя файла: <input type="text" value="d:\Kz.txt"/>	
Начальные значения параметров	Конечные значения параметров
X: <input type="text" value="140000"/> м	X: <input type="text" value="140354,63"/> м
Y: <input type="text" value="157000"/> м	Y: <input type="text" value="157139,37"/> м
<input type="button" value="Рассчитать"/>	Начальное значение целевой функции
	<input type="text" value="19936,325188"/>
	Минимальное значение целевой функции
	<input type="text" value="0,013445"/>

в) Начальные значения параметров заданы очень близко к истинным.

Комбинированная засечка	
Исходные данные	Решение
Имя файла: <input type="text" value="d:\Kz.txt"/>	
Начальные значения параметров	Конечные значения параметров
X: <input type="text" value="140350"/> м	X: <input type="text" value="140354,63"/> м
Y: <input type="text" value="157135"/> м	Y: <input type="text" value="157139,37"/> м
<input type="button" value="Рассчитать"/>	Начальное значение целевой функции
	<input type="text" value="0,416169"/>
	Минимальное значение целевой функции
	<input type="text" value="0,002841"/>

ПРИЛОЖЕНИЕ П**Результаты решения многократной линейной зачески
простым генетическим алгоритмом
при разных вариантах задания начальных значений параметров**

а) Начальные значения параметров заданы далёкими от истинных.

Многократная линейная засечка

Исходные данные

Имя файла: d:\Lz.txt

Начальные значения параметров

X: 0 м

Y: 0 м

Рассчитать

Решение

Конечные значения параметров

X: 2100,145 м

Y: 2100,350 м

Начальное значение целевой функции: 16288238,142724

Минимальное значение целевой функции: 0,002502

б) Начальные значения параметров заданы ближе к истинным.

Многократная линейная засечка

Исходные данные

Имя файла: d:\Lz.txt

Начальные значения параметров

X: 2000 м

Y: 2000 м

Рассчитать

Решение

Конечные значения параметров

X: 2100,145 м

Y: 2100,350 м

Начальное значение целевой функции: 43506,488727

Минимальное значение целевой функции: 0,002491

в) Начальные значения параметров заданы очень близко к истинным.

Многократная линейная засечка

Исходные данные

Имя файла: d:\Lz.txt

Начальные значения параметров

X: 2100 м

Y: 2100 м

Рассчитать

Решение

Конечные значения параметров

X: 2100,145 м

Y: 2100,350 м

Начальное значение целевой функции: 0,908184

Минимальное значение целевой функции: 0,001334